Lösungen tegut F 17

1. Aufgabe

a)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

berührt die x-Achse = Nullstelle und Extrempunkt

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_x(-2\|0)$	$f(-2) = 0$	I	$-8a + 4b - 2c + d = 0$
$x = -2$; $m = 0$	$f'(-2) = 0$	II	$12a - 4b + c = 0$
$W(-1\|-1)$	$f(-1) = -1$	III	$-a + b - c + d = -1$
$x = -1$; $K = 0$	$f''(-1) = 0$	IV	$-6a + 2b = 0$

b)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_x(-2\|0)$	$f(-2) = 0$	I	$16a - 8b + 4c - 2d + e = 0$
$x = -2$; $m = 0$	$f'(-2) = 0$	II	$-32a + 12b - 4c + d = 0$
$H(-1\|3)$	$f(-1) = 3$	III	$a - b + c - d + e = 3$
$x = -1$; $m = 0$	$f'(-1) = 0$	IV	$-4a + 3b - 2c + d = 0$
$S_x(1\|0)$	$f(1) = 0$	V	$a + b + c + d + e = 0$

c)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$x = 3$; $m = 0$	$f'(3) = 0$	I	$27a + 6b + c = 0$
$S_x(5\|0)$	$f(5) = 0$	II	$125a + 25b + 5c + d = 0$
$P(-1\|2)$	$f(-1) = 2$	III	$-a + b - c + d = 2$
$x = -1$; $m = -0{,}5$	$f'(-1) = -0{,}5$	IV	$3a - 2b + c = -0{,}5$

d)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Wenn t(x) gegeben ist, kann man damit den zugehörigen y-Wert ausrechnen: t(3) = 5.
Dieser Punkt ist dann der doppelte Schnittpunkt der Tangente mit der Funktion.

Die y-Achse hat den x-Wert null. x = 0

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_{1/2}(3\|5)$	$f(3) = 5$	I	$81a + 27b + 9c + 3d + e = 5$
$x = 3$; $m = 2$	$f'(3) = 2$	II	$108a + 27b + 6c + d = 2$
$P(-1\|4)$	$f(-1) = 4$	III	$a - b + c - d + e = 4$
$x = -1$; $m = -2$	$f'(-1) = -2$	IV	$-4a + 3b - 2c + d = -2$
$x = 0$; $m = 0$	$f'(0) = 0$	V	$d = 0$

e) **PS**

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$
$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$
$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

Ein Sattelpunkt hat die Steigung m = 0 und ist auch ein Wendepunkt.

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
Sattelp$(2\|1)$	$f(2) = 1$	I	$32a + 8b + 2c = 1$
$x = 2; m = 0$	$f'(2) = 0$	II	$80a + 12b + c = 0$
$x = 2; K = 0$	$f''(2) = 0$	III	$160a + 12b = 0$

f) **AS**

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 2b$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$W(-3\|2)$	$f(-3) = 2$	I	$81a + 9b + c = 2$
$x = -3; K = 0$	$f''(-3) = 0$	II	$108a + 2b = 0$
$x = -3; m = -2$	$f'(-3) = -2$	III	$-108a - 6b = -2$

2. Aufgabe

a)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
Sattelp$(0\|0)$	$f(0) = 0$	I	$e = 0$
$x = 0; m = 0$	$f'(0) = 0$	II	$d = 0$
$x = 0; K = 0$	$f''(0) = 0$	III	$2c = 0$ => $c = 0$
$S_x(2\|0)$	$f(2) = 0$	IV	$16a + 8b + 4c + 2d + e = 0$
$x = 1; m = 2$	$f'(1) = 2$	V	$4a + 3b + 2c + d = 2$

Die Variablen c, d und e sind gleich null und fallen deshalb weg. Dies vereinfacht das Gleichungssystem auf:

$$0 = 16a + 8b$$
$$2 = 4a + 3b$$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man:

$X = a = -1$ und $Y = b = 2$

Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$$f(x) = -x^4 + 2x^3$$

(Überprüft man die einzelnen Angaben mit dieser Gleichung, kann man die Richtigkeit der Rechnung bestätigen.)

b) **PS**

$$f(x) = ax^3 + bx$$
$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$P(1\mid -8)$	$f(1) = -8$	I $\quad a + b = -8$	b einsetzen in I ergibt:
$x = 0 \quad m = -9$	$f'(0) = -9$	II $\quad b = -9$	$a = 1$

(Der Ursprung als Punkt selbst kann hier nicht verwendet werden, da dann nur 0 = 0 herauskommt.)
Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

c) **AS**

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$S_y(0\mid 4)$	$f(0) = 4$	I $\quad c = 4$
$S_x(1\mid 0)$	$f(1) = 0$	II $\quad a + b + c = 0$
$x = 1; m = -6$	$f'(1) = -6$	III $\quad 4a + 2b = -6$

Ist der Wert einer oder mehrerer Variablen bereits bekannt, setzt man diese in die anderen Gleichungen ein.

II $\quad a + b + 4 = 0 \mid -4 \qquad a + b = -4$

III $\quad 4a + 2b = -6 \qquad 4a + 2b = -6$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man:

$X = a = 1$ und $Y = b = -5$

Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

d)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$x = 2 \quad m = -6$	$f'(2) = -6$	I $\quad 12a + 4b + c = -6$
$W(0\mid -1)$	$f(0) = -1$	II $\quad d = -1$
$x = 0;\ K = 0$	$f''(0) = 0$	III $\quad 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$
$x = 0; m = 6$	$f'(0) = 6$	IV $\quad c = 6$

b und c einsetzen in I ergibt:

$12a + 4 \cdot 0 + 6 = -6 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$$f(x) = -x^3 + 6x - 1$$

e) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$O(0\|0)$	$f(0) = 0$	I	$d = 0$
$x = 0;\ m = 0$	$f'(0) = 0$	II	$c = 0$
$P(-3\|0)$	$f(-3) = 0$	III	$-27a + 9b - 3c + d = 0$
$x = -3;\ m = 9$	$f'(-3) = 9$	IV	$27a - 6b + c = 9$

Die Variablen c und d sind gleich null und fallen deshalb weg. Dies vereinfacht das Gleichungssystem auf:

I $-27a + 9b = 0$
II $27a - 6b = 9$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man:

$X = a = 1$ und $Y = b = 3$

Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$f(x) = x^3 + 3x^2$

f) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

waagrechte Tangente = Steigung null

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_x(4\|0)$	$f(4) = 0$	I	$64a + 16b + 4c + d = 0$
$x = 4;\ m = 0$	$f'(4) = 0$	II	$48a + 8b + c = 0$
$W(2\|3)$	$f(2) = 3$	III	$8a + 4b + 2c + d = 3$
$x = 2;\ K = 0$	$f''(2) = 0$	IV	$12a + 2b = 0$

In dieser Aufgabe muss man erst die Variable d eliminieren, und ein neues Gleichungssystem bilden. Erst dann kann man mit dem TR arbeiten.

I $64a + 16b + 4c + d = 0$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} 64a + 16b + 4c + d = 0 \\ -8a - 4b - 2c - d = -3 \end{array}\right\} +$ $\quad$ => $56a + 12b + 2c = -3$

II $8a + 4b + 2c + d = 3 \quad |\cdot(-1)$

$56a + 12b + 2c = -3$
$48a + 8b + c = 0$
$12a + 2b = 0$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man:

$X = a = \frac{3}{16}$ und $Y = b = -\frac{9}{8}$ und $Z = c = 0$

Setzt man die Parameter in die Gleichung I ein, kann man d berechnen: $d = 6$

Die Funktionsgleichung ergibt sich zu: $f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 6$