

Lösungen tegut B 17

1. Aufgabe

a) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Polynomdivision mit z.B. $x_1 = -1$ (TR)

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x + 1) = x^2 - 5x + 6 \\ -(x^3 + 1x^2) \\ \hline -5x^2 + x \\ -(-5x^2 - 5x) \\ \hline 6x + 6 \\ -(6x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

p-q-Formel

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= +2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6} \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Horner-Schema mit z.B. $x_1 = -1$ (TR)

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & x^2 & x^1 & x^0 & & \\ 1 & -4 & 1 & 6 & & \\ 0 & 1 & -5 & 6 & 0 & \\ \hline & x^2 & -5x & +6 & = & 0 \end{array}$$

Rechnungen (im Kopf)

$$\begin{aligned} 0 \cdot (-1) + 1 &= 1 \\ 1 \cdot (-1) - 4 &= -5 \\ -5 \cdot (-1) + 6 &= 6 \\ 6 \cdot (-1) + 6 &= 0 \end{aligned}$$

b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ biquadratische Gleichung, Substitution

$$x^2 = z$$

$$z^2 - 29z + 100 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$z_{1/2} = +14,5 \pm \sqrt{14,5^2 - 100}$$

$$z_1 = 25$$

$$z_2 = 4$$

Resubstitution mit

$$z = x^2$$

$$x^2 = 25 \quad | \sqrt{\quad} \quad x_1 = 5 \quad ; \quad x_2 = -5$$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad} \quad x_3 = 2 \quad ; \quad x_4 = -2$$

c) $(x - 4)(x + 3) = (x + 5)^2 - 4$ Ausmultiplizieren der Klammern, binomische Formel

$$x^2 + 3x - 4x - 12 = x^2 + 10x + 25 - 4$$

$$x^2 - x - 12 = x^2 + 10x + 21 \quad | -x^2$$

$$-x - 12 = 10x + 21 \quad | -10x + 12$$

$$-11x = 33 \quad | :(-11)$$

$$x = -3$$

d) $x^3 - 5x^2 + 3x = 0$ Ausklammern von x

$$x \cdot (x^2 - 5x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{2/3} = +2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 3}$$

$$x_2 \approx 4,30$$

$$x_3 \approx 0,70$$

ACHTUNG: Rundungszeichen verwenden!

Auf zwei Kommastellen runden!

e) $x^3 + 6x^2 = 0$ Ausklammern von x^2
 $x^2 \cdot (x + 6) = 0$
 $x^2 = 0 \quad | \sqrt{\quad}$; $x + 6 = 0 \quad | -6$
 $x_{1/2} = 0$; $x_3 = -6$

f) $x^4 - 625 = 0 \quad | + 625$
 $x^4 = 625 \quad | \sqrt[4]{\quad}$
 $x_1 = 5$; $x_2 = -5$

g) $0,4x^3 + 1,2x^2 - 5,2x - 6 = 0$ Polynomdivision mit $x_1 = -1$ (TR)
 $(0,4x^3 + 1,2x^2 - 5,2x - 6) : (x + 1) = 0,4x^2 + 0,8x - 6$
 $\frac{-(0,4x^3 + 0,4x^2)}{\quad}$
 $\quad 0,8x^2 - 5,2x$
 $\quad \frac{-(0,8x^2 + 0,8x)}{\quad}$
 $\quad \quad -6x - 6$
 $\quad \quad \frac{-(-6x - 6)}{\quad}$
 $\quad \quad \quad 0$

$0,4x^2 + 0,8x - 6 = 0 \quad | : 0,4$
 $x^2 + 2x - 15 = 0$ p-q-Formel
 $x_{2/3} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 15}$
 $x_2 = 3$
 $x_3 = -5$

- oder erst die gesamte Gleichung durch 0,4 dividieren
- oder Horner-Schema anwenden

h) $-5x^2 + 20x = 0 \quad | : (-5)$
 $x^2 - 4x = 0$ Ausklammern von x
 $x(x - 4) = 0$
 $x_1 = 0$; $x_2 = 4$

i) $-\frac{1}{4}x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + 1,5 = 0 \quad | : (-\frac{1}{4})$
 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ (TR)
 $(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 1) = x^2 + 5x + 6$
 $\frac{-(x^3 - x^2)}{\quad}$
 $\quad 5x^2 + x$
 $\quad \frac{-(5x^2 - 5x)}{\quad}$
 $\quad \quad 6x - 6$
 $\quad \quad \frac{-(6x - 6)}{\quad}$
 $\quad \quad \quad 0$

$x^2 + 5x + 6 = 0$ p-q-Formel
 $x_{2/3} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6}$
 $x_2 = -2$
 $x_3 = -3$

j) $-0,5x^4 + 5x^2 - 4,5 = 0 \quad | : (-0,5)$
 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ Substitution
 $x^2 = z$
 $z^2 - 10z + 9 = 0$ p-q-Formel
 $z_{1/2} = 5 \pm \sqrt{5^2 - 9}$
 $z_1 = 9$
 $z_2 = 1$

$$z = x^2 \quad \text{Resubstitution}$$

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad} \quad x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = -3$$

$$x^2 = 1 \quad | \sqrt{\quad} \quad x_3 = 1 \quad ; \quad x_4 = -1$$

$$\text{k) } \frac{1}{5}x^3 - x - 20 = 0 \quad | : \frac{1}{5}$$

$$x^3 - 5x - 100 = 0$$

Polynomdivision mit $x_1 = 5$ (TR)

$$(x^3 + 0x^2 - 5x - 100) : (x - 5) = x^2 + 5x + 20 \quad \text{Platzhalter } + 0x^2 \text{ dazwischen setzen}$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 5x^2) \\ \hline \end{array} \quad \text{(gilt auch für Horner-Schema)}$$

$$5x^2 - 5x$$

$$x^2 + 5x + 20 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$-(5x^2 - 25x)$$

$$x_{2/3} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 20}$$

$$20x - 100$$

$$x_{2/3} = \text{nicht lösbar}$$

$$-(20x - 100)$$

$$\underline{\quad\quad\quad} \\ 0$$

$$\text{l) } -x^2 + 81 = 0$$

$$x^2 = 81 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_1 = 9$$

$$x_2 = -9$$

$$\text{m) } 0,5x^4 - 8x^2 = 0$$

$$x^4 - 16x^2 = 0$$

Ausklammern von x^2

$$x^2(x^2 - 16) = 0$$

$$x_{1/2} = 0 \quad ; \quad x^2 - 16 = 0$$

$$x_3 = 4$$

$$x_4 = -4$$

$$\text{n) } -3(x - 1) = -4(-2 - x) + 2 \quad \text{Klammern auflösen}$$

$$-3x + 3 = 8 + 4x + 2$$

$$-3x + 3 = 4x + 10 \quad | +3x - 10$$

$$-7 = 7x \quad | :7$$

$$x = -1$$

$$\text{o) } \frac{5}{6}x + 15 = 0 \quad | -15$$

$$\frac{5}{6}x = -15 \quad | : \frac{5}{6}$$

$$x = -18$$

- p) $3x^3 - 8,5x^2 - 4,5 = 0$ Nicht durch Faktor 3 dividieren, da Brüche entstehen!
 Polynomdivision mit $x_1 = 3$ (TR)

$$(3x^3 - 8,5x^2 + 0x - 4,5) : (x - 3) = 3x^2 + 0,5x + 1,5$$

$$\begin{array}{r} -(3x^3 - 9x^2) \\ \hline 0,5x^2 + 0x \\ -(0,5x^2 - 1,5x) \\ \hline 1,5x - 4,5 \\ -(1,5x - 4,5) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3x^2 + 0,5x + 1,5 = 0 \quad | : 3$$

$$x^2 + \frac{1}{6}x + 0,5 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{2/3} = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 - 0,5}$$

$$x_{2/3} = \text{nicht lösbar}$$

- q) $-0,5x^2 - 4,5x - 4 = 0 \quad | : (-0,5)$

$$x^2 + 9x + 8 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{1/2} = -4,5 \pm \sqrt{4,5^2 - 8}$$

$$x_1 = -1 \quad ; \quad x_2 = -8$$

- r) $\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0$ Nicht durch Faktor dividieren, da neue Brüche entstehen!

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ (TR)

$$\left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 2\right) : (x - 1) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$$

$$\begin{array}{r} -\left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2\right) \\ \hline \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \\ -\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) \\ \hline 2x - 2 \\ -(2x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \quad | : \frac{3}{4}$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{2/3} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{8}{3}}$$

$$x_{2/3} = \text{nicht lösbar}$$

- s) $4x^4 - 6x^3 = 0$

$$x^3(4x - 6) = 0 \quad \text{Ausklammern von } x^3$$

$$x^3 = 0 \quad | \sqrt[3]{\quad} \quad ; \quad 4x - 6 = 0$$

$$x_{1/2/3} = 0 \quad x_4 = 1,5$$

- t) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 7x = 0 \quad | : \frac{1}{2}$

$$x^3 - 0,5x^2 - 14x = 0 \quad \text{Ausklammern von } x$$

$$x(x^2 - 0,5x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x^2 - 0,5x - 14 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{2/3} = 0,25 \pm \sqrt{0,25^2 + 14}$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = -3,5$$

u) $-3x^4 + 21x^2 - 36 = 0 \quad | :(-3)$

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ Substitution

$x^2 = z$

$z^2 - 7z + 12 = 0$ p-q-Formel

$z_{1/2} = 3,5 \pm \sqrt{3,5^2 - 12}$

$z_1 = 4$

$z_2 = 3$

$z = x^2$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$ $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

$x^2 = 3 \quad | \sqrt{\quad}$ $x_3 \approx 1,73$; $x_4 \approx -1,73$

v) $0,1x^3 - 0,2x^2 - 0,4x + 0,8 = 0 \quad | :0,1$

$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$ (TR)

$(x^3 - 2x^2 - 4x + 8) : (x - 2) = x^2 - 4$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline 0 - 4x + 8 \\ -(-4x + 8) \\ \hline 0 \end{array}$$

$x^2 - 4 = 0 \quad | +4$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$

$x_2 = 2$ (doppelte Lösung)

$x_3 = -2$

w) $-\frac{1}{5}x^4 + 2x^3 - 5x^2 = 0 \quad | \left(-\frac{1}{5}\right)$

$x^4 - 10x^3 + 25x^2 = 0$ Ausklammern von x^2

$x^2(x^2 - 10x + 25) = 0$

$x_{1/2} = 0$; $x^2 - 10x + 25 = 0$ p-q-Formel

$x_{3/4} = 5 \pm \sqrt{25 - 25}$

$x_{3/4} = 5$

x) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$ Substitution

$x^2 = z$

$z^2 - 18z + 81 = 0$ p-q-Formel

$z_{1/2} = 9 \pm \sqrt{81 - 81}$

$z_1 = 9$

beide Lösungen schreiben, da jedes z zurückgetauscht wird

$z_2 = 9$

und jedes Mal die Wurzel gezogen werden muss

$z = x^2$

$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$

$x_{1/3} = 3$; $x_{2/4} = -3$ doppelte Lösungen

$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$

$$y) \quad -4x^2 + 6 + 3x^3 - x = 0$$

$$3x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$$

Gleichung sortieren!

Nicht durch den Faktor 3 dividieren.

Polynomdivision mit $x_1 = -1$ (TR)

$$(3x^3 - 4x^2 - x + 6) : (x + 1) = 3x^2 - 7x + 6$$

$$\begin{array}{r} \underline{-(3x^3 + 3x^2)} \\ -7x^2 - x \\ \underline{-(-7x^2 - 7x)} \\ 6x + 6 \\ \underline{-(6x + 6)} \\ 0 \end{array}$$

$$3x^2 - 7x + 6 = 0 : 3$$

p-q-Formel

$$x^2 - \frac{7}{3}x + 2 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 - 2}$$

$$x_{2/3} = \text{n.l.}$$

$$z) \quad x^4 - 2,8x^3 - 11,48x^2 + 2,4x = 0$$

Ausklammern von x

$$x(x^3 - 2,8x^2 - 11,48x + 2,4) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x^3 - 2,8x^2 - 11,48x + 2,4 = 0$$

Polynomdivision mit $x_2 = 5$ (TR)

$$(x^3 - 2,8x^2 - 11,48x + 2,4) : (x - 5) = x^2 + 2,2x - 0,48$$

$$\begin{array}{r} \underline{-(x^3 - 5x^2)} \\ 2,2x^2 - 11,48x \\ \underline{-(2,2x^2 - 11x)} \\ -0,48x + 2,4 \\ \underline{-(-0,48x + 2,4)} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2,2x - 0,48 = 0$$

p-q-Formel

$$x_{3/4} = -1,1 \pm \sqrt{1,1^2 + 0,48}$$

$$x_3 = 0,2 \quad x_4 = -2,4$$