Lösungen tegut D 16

1.Aufgabe

a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1$

Schnittpunkte mit den Achsen:

$x = 0 \qquad S_y(0|-1)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1$

TR: $x_{N1} = -2$; $x_{N2} = 1$; $x_{N3} = 4 \qquad S_{x1}(-2|0) \quad S_{x2}(1|0) \quad S_{x3}(4|0)$

$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \qquad f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

Extrempunkte:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

TR: $x_{E1} \approx -0{,}73$; $x_{E2} \approx 2{,}73$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(-0{,}73) \approx 1{,}30 > 0 \Rightarrow T$

$f''(2{,}73) \approx -1{,}30 < 0 \Rightarrow H$

3. Schritt

$f(-0{,}73) \approx -1{,}30 \qquad T(-0{,}73|-1{,}30)$

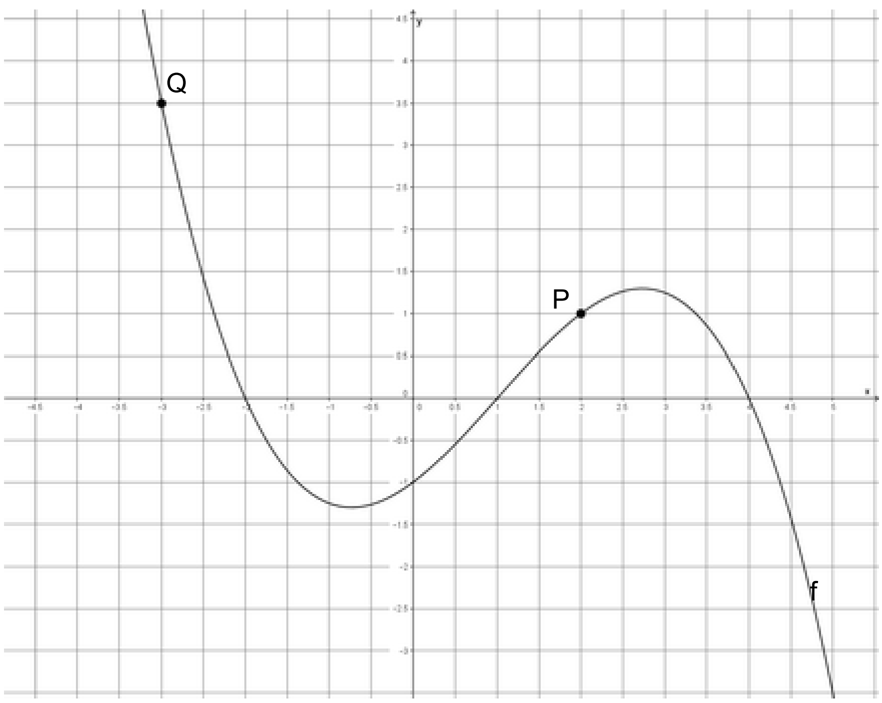
$f(2{,}73) \approx 1{,}30 \qquad H(2{,}73|1{,}30)$

b) $f(2) = 1 \quad P(2|1)$

c) $f(x) = 3{,}5 \qquad 3{,}5 = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1 \,|-3{,}5$

$0 = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 4{,}5 \qquad$ TR: $x_1 = -3$; $x_{2/3} =$ n.l. $\quad Q(-3|3{,}5)$

d)



e) $f(x) = m$

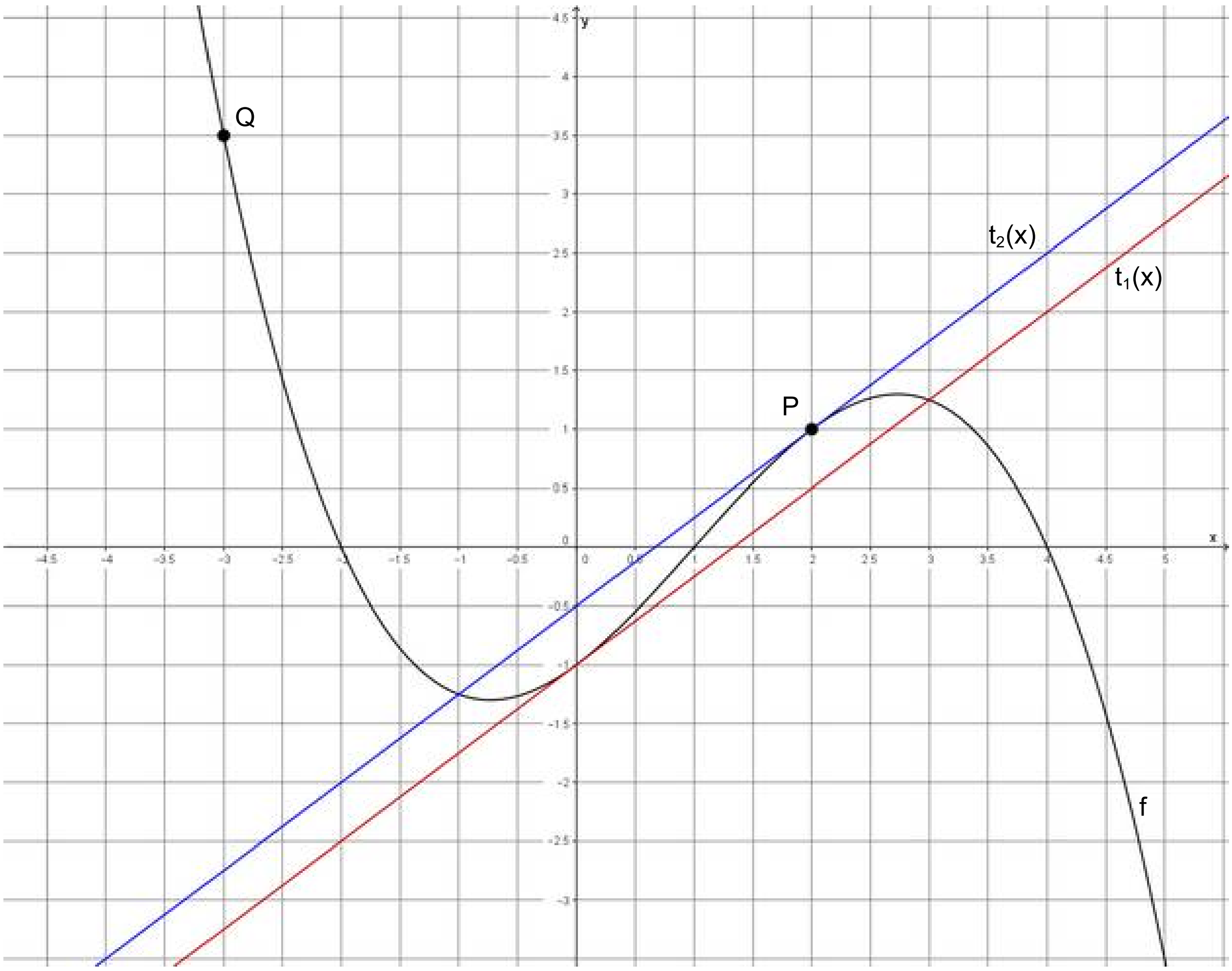
$f(0) = \frac{3}{4} \quad m_1 = \frac{3}{4}$

$f(2) = \frac{3}{4} \quad m_2 = \frac{3}{4}$

f) $y = m \cdot x + b$

$m_1 = \frac{3}{4}$	$m_2 = \frac{3}{4}$
$x_1 = 0$	$x_2 = 2$
$y_1 = -1$	$y_2 = 1$
$-1 = \frac{3}{4} \cdot 0 + b$	$1 = \frac{3}{4} \cdot 2 + b$
$b = -1$	$b = -\frac{1}{2}$
$t_1(x) = \frac{3}{4}x - 1$	$t_2(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

g)



2.Aufgabe

a) $f'(x) = m \quad f'(x) = 2x^2 + 4x$ mit $m = 6$ ergibt sich

$6 = 2x^2 + 4x \;\left|\; -6\right.$

$0 = 2x^2 + 4x - 6 \;\left|\; :(2)\right.$

$0 = x^2 + 2x - 3$ p-q

$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$x_1 = 1;\ x_2 = -3$

$x_1 = 1$

$f(1) = \frac{8}{3}$

$t(x) = m \cdot x + b$

$\frac{8}{3} = 6 \cdot 1 + b$

$b = -\frac{10}{3}$ => $t_1(x) = 6x - \frac{10}{3}$

$x_2 = -3$

$f(-3) = 0$

$t(x) = m \cdot x + b$

$0 = 6 \cdot (-3) + b$

$b = 18$ => $t_2(x) = 6x + 18$

b) $\tan(\alpha) = m$

$\tan^{-1}(m) = \alpha$

$\tan^{-1}(0{,}75) = \alpha$

$\alpha = 36{,}87°$

c) $t_1(x) = f(x)$

$6x - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \;\left|\; -6x + \frac{10}{3}\right.$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + \frac{10}{3}$

$x_{1/2} = 1;\ x_3 = -5$

$x = 1$ ist eine doppelte Lösung und somit die Stelle, an der die Tangente anliegt. Da nach dem weiteren Schnittpunkt gefragt ist, muss man die einfache Lösung benutzten.

$f(-5) = -\frac{100}{3}$ (und zur Überprüfung $t(-5) = -\frac{100}{3}$) => $S_3(-5|-33{,}3)$

$t_2(x) = f(x)$

$6x + 18 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \;\left|\; -6x - 18\right.$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x - 18$

$x_1 = 3;\ x_{2/3} = -3$

$x = -3$ ist eine doppelte Lösung, kommt also nicht in Frage; somit

$f(3) = 36$ => $S_3(3|36)$ Die Überprüfung in t(x) sollte selbstverständlich sein.

3.Aufgabe

a) Funktion f(x) und Stelle $x=1$ sind gegeben, Tangente erstellen, weiteren Schnittpunkt ermitteln

$f(x)=0{,}25x^3-1{,}5x^2+8 \quad x=1 \quad f(1)=6{,}75$ y-Wert

$f'(x)=0{,}75x^2-3x \quad x=1 \quad f'(1)=-2{,}25$ m

$t(x)=m\cdot x+b$

$6{,}75=-2{,}25\cdot 1+b$

$9=b$

=> $t(x)=-2{,}25x+9$

$t(x)=f(x)$

$-2{,}25x+9=0{,}25x^3-1{,}5x^2+8 \,|+2{,}25x-9$

$0=0{,}25x^3-1{,}5x^2+2{,}25x-1$

TR: $x_{1/2}=1;\ x_3=4$

Die Stelle x = 1 ist doppelte Lösung, also Tangente.

Die Stelle x = 4 liefert den gesuchten Punkt.

$f(4)=0 \quad P(4|0)$

Im Punkt $P(4|0)$ trifft der Stein wieder auf die Straße.

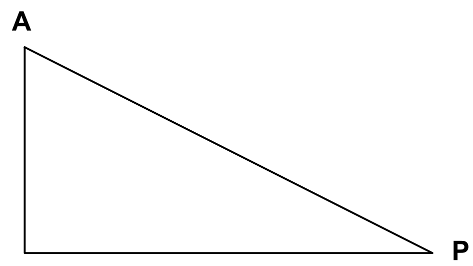
(Es ist beabsichtigt, dass die Skizze nicht mit dem berechneten Wert übereinstimmt, sonst wäre man versucht, einfach die Nullstellen zu berechnen.)

b) Die Länge der Strecke von A nach P berechnet man mit dem Satz des Pythagoras $a^2+b^2=c^2$ und den Punkten $A(1|6{,}75)$ und $P(4|0)$.

Im rechtwinkligen Steigungsdreieck arbeitet man mit der Differenz der x- und y-Werte.

$a=4-1=3$

$b=6{,}75-0=6{,}75$



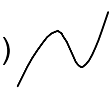
$3^2+6{,}75^2=c^2$ oder $c=\sqrt{a^2+b^2}$ also $c=\sqrt{3^2+6{,}75^2}$ => $c\approx 7{,}39$ Längeneinheiten

$\text{Entfernung}=7{,}39\cdot 5=36{,}95\approx 37\text{m}$

Die Entfernung (Luftlinie) vom Abschusspunkt A zum Auftreffpunkt P beträgt 37 Meter.

c) $f(x)=0{,}25x^3-1{,}5x^2+8$

1. Definitionsbereich: $D=R$

2. Verlauf: $x\to-\infty; f(x)\to-\infty$ / $x\to+\infty; f(x)\to+\infty$ (Der Graph kommt von unten und geht nach oben.) 

3. keine Symmetrie (KS), da gerade und ungerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$x=0 \quad f(0)=8 \quad S_y(0|8)$

$f(x_N) = 0$

$0 = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 8 \,|: 0{,}25$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^3 - 6x^2 + 32$ Polynomdivision mit $x_{N1} = 4$ (TR)

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 0x + 32) : (x - 4) = x^2 - 2x - 8 \\
\underline{-(x^3 - 4x^2)} \\
\quad -2x^2 + 0x \\
\quad \underline{-(-2x^2 + 8x)} \\
\qquad -8x + 32 \\
\qquad \underline{-(-8x + 32)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x_{N2/3} = +1 \pm \sqrt{1+8}$ pq-Formel

$x_{N2} = 4$

$x_{N3} = -2$

$S_{x1/2}(4|0) \quad S_{x3}(-2|0)$

Ableitungen

$f'(x) = 0{,}75x^2 - 3x$

$f''(x) = 1{,}5x - 3$

$f'''(x) = 1{,}5$

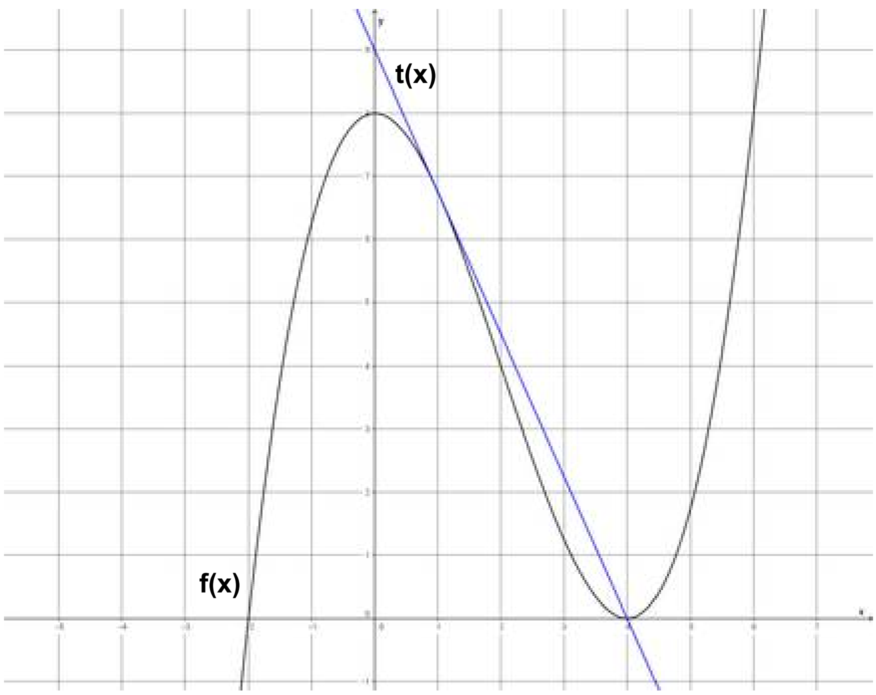
5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$	2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$	3. Schritt	
$0 = 0{,}75x^2 - 3x \,|: 0{,}75$	$f''(0) = -3 < 0 \Rightarrow H$	$f(0) = 8$	$H(0|8)$
$0 = x^2 - 4x$	$f''(4) = 3 > 0 \Rightarrow T$	$f(4) = 0$	$T(4|0)$
$0 = x(x-4)$			
$x_{E1} = 0$	$M_1 =]-\infty;0]$ monoton steigend		
$x_{E2} = 4$	$M_2 = [0;4]$ monoton fallend		
	$M_3 = [4;+\infty[$ monoton steigend		

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$	2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$	3. Schritt	
$0 = 1{,}5x - 3 \,|+3 \,|: 1{,}5$	$f'''(2) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow R-L-K$	$f(2) = 4$	$W_{R-L}(2|4)$
$x_W = 2$			

7. Zeichnung



d) Auftreffpunkt P bei p(x):

$p(x_N) = 0$

$0 = -\frac{1}{500}x^2 + \frac{2}{25}x \,\Big|\, : \left(-\frac{1}{500}\right)$

$0 = x^2 - 40x$

$0 = x(x-40)$

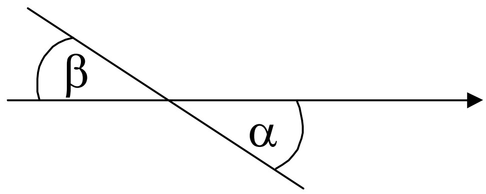
$x_{N1} = 0$; $x_{N2} = 40$ $P_{neu}(40|0)$

Der Auftreffwinkel β ergibt sich aus dem Steigungswinkel der Parabel im Auftreffpunkt.

$\tan(\alpha) = m$ und $p'(x) = m$

$p(x) = -\frac{1}{500}x^2 + \frac{2}{25}x$

$p'(x) = -\frac{1}{250}x + \frac{2}{25}$



$p'(40) = -\frac{2}{25}$ also $m = -\frac{2}{25}$

$\tan^{-1}(m) = \alpha$

$\tan^{-1}\left(-\frac{2}{25}\right) = \alpha$

$\alpha = -4{,}57°$ (negativer Winkel, da fallende Tangente; Winkel unterhalb der x-Achse)

$\beta = 4{,}57°$

Der Winkel β beträgt 4,57°.

e) Die größte Höhe der Flugbahn liegt im Hochpunkt (Scheitelpunkt) der Parabel vor.

$p(x) = -\frac{1}{500}x^2 + \frac{2}{25}x$

$p'(x) = -\frac{1}{250}x + \frac{2}{25}$

$p''(x) = -\frac{1}{250}$

1. Schritt $p'(x_E) = 0$

$0 = -\frac{1}{250}x + \frac{2}{25} \,\Big|\, : \left(-\frac{1}{250}\right)$

$0 = x - 20$

$x_E = 20$

2. Schritt $p'(x_E) = 0 \wedge p''(x_E) \neq 0$

$p''(20) = -\frac{1}{250} < 0 \Rightarrow H$ $f(20) = 0{,}8$

3. Schritt

$H(20|0{,}8)$

Der Stein erreicht eine größte Höhe von 0,8 Metern.