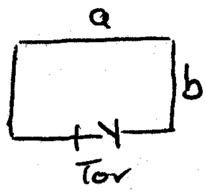
Lösungen zu AB L

1.) Extremwertaufgabe



HB: $A = a \cdot b$

NB: $u = 40\,m$ Zaun $+ 2\,m$ Tor

$u = 42\,m$

$u = 2a + 2b$

$42 = 2a + 2b$

$42 - 2a = 2b \quad |:2$

$\underline{21 - a = b}$

einsetzen in HB

$A(a) = a \cdot (21 - a)$

$A(a) = 21a - a^2$ Zielfunktion

$\mathbb{D} = [0; 21]$

$A'(a) = 21 - 2a$

$A''(a) = -2 < 0 \Rightarrow$ Max

$A'(a) = 0$

$0 = 21 - 2a \quad |+2a$

$2a = 21 \quad |:2$

$a = 10{,}5\,m$

einsetzen in NB

$b = 21 - 10{,}5$

$b = 10{,}5\,m$

einsetzen in HB

$A = 10{,}5 \cdot 10{,}5 = 110{,}25\,m^2$

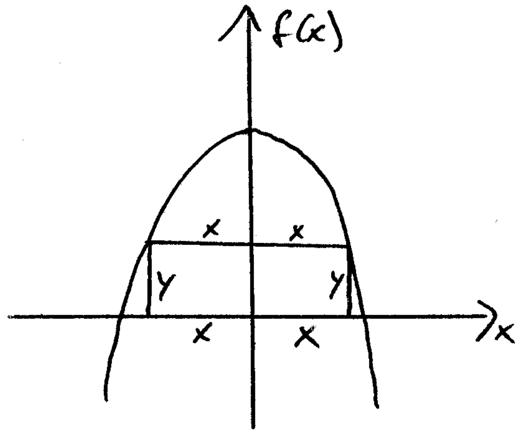
Randstellen

$A(0) = 0 < 110{,}25$

$A(21) = 0 < 110{,}25$

Die Spielplatzseiten sind beide 10,5 m lang.

2) Extremwertaufgabe



HB: $u = 4x + 2y$

NB: $f(x) = 6 - \frac{1}{4}x^2$
y

einsetzen ergibt

$u(x) = 4x + 2\cdot(6 - \frac{1}{4}x^2)$

$u(x) = 4x + 12 - \frac{1}{2}x^2$

$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 12$

$\mathbb{D} = [0;\ 4{,}9]$

$f(x) = 0$

$0 = 6 - \frac{1}{4}x^2$

$\frac{1}{4}x^2 = 6 \quad | \cdot 4$

$x^2 = 24 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 4{,}9$

$[x_2 = -4{,}9]$

$u'(x) = -x + 4$

$u''(x) = -1 < 0 \Rightarrow$ Max

$u'(x) = 0$

$0 = -x + 4 \quad | +x$

$\underline{x = 4}$

einsetzen in NB

$f(4) = 6 - \frac{1}{4}\cdot 4^2 = 2$

$\underline{y = 2}$

einsetzen in HB

$u = 4\cdot 4 + 2\cdot 2 = \underline{20\,m}$

Randstellen

$u(0) = 12 < 20$

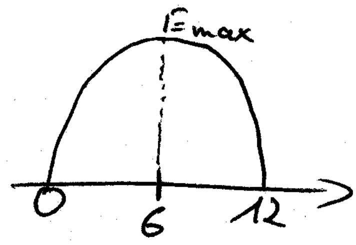
$u(4{,}9) = 19{,}6 < 20$

Aber immer noch weniger als der Umfang.

Die Ergebnisse sind ungewohnt, aber richtig. Für $x=0$ bewegt man sich auf der y-Achse (bis $+6 = S_y$) also 12 Einheiten für hoch und runter. Für $x = 4{,}9$ ist es auf der x-Achse und $2\cdot 4{,}9$ für links nach rechts und auch $2\cdot 4{,}9$ für zurück.

3.) ökonomische Anwendung

a) $E(x) = ax^2 + bx$



$x = 12$ Nst. $\Rightarrow (12|0)$

$E_{max} = 432$ GE $\Rightarrow (6|432)$

einsetzen als LGS

$$\begin{aligned} 0 &= 144a + 12b \\ 432 &= 36a + 6b \quad | \cdot (-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 144a + 12b \\ -864 &= -72a - 12b \end{aligned}$$

$$-864 = 72a$$

$$\left.\begin{aligned} -12 &= a \\ 144 &= b \end{aligned}\right\} \Rightarrow E(x) = -12x^2 + 144x$$

b) $G(x) = E(x) - K(x)$

$$= -12x^2 + 144x - (x^3 - 10x^2 + 56x + 100)$$

$$\underline{G(x) = -x^3 - 2x^2 + 88x - 100}$$

$$G'(x) = -3x^2 - 4x + 88$$

$$G''(x) = -6x - 4$$

$G'(x) = 0$

$$0 = -3x^2 - 4x + 88 \quad | : (-3)$$

$$0 = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{88}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{88}{3}}$$

$$x_1 = 4{,}8$$

$$[x_2 = -6{,}1]$$

$G''(4{,}8) = -6 \cdot 4{,}8 - 4 = -32{,}8 < 0 \Rightarrow$ Max

$\underline{G(4{,}8) = 165{,}7 \text{ GE}}$

3) c) $p(x) = -12x + 144$

$p(4{,}8) = -12 \cdot 4{,}8 + 144 = \underline{86{,}4\ GE}$

Cournot'scher Punkt $C(4{,}8|86{,}4)$

d) $E(x) = 60x$

$K(x) = x^3 - 10x^2 + 56x + 50$

$G(x) = 60x - (x^3 - 10x^2 + 56x + 50)$

$= 60x - x^3 + 10x^2 - 56x - 50$

$\underline{G(x) = -x^3 + 10x^2 + 4x - 50}$

$G'(x) = -3x^2 + 20x + 4$

$G''(x) = -6x + 20$

$G'(x) = 0$

$0 = -3x^2 + 20x + 4 \quad |:(-3)$

$0 = x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{4}{3}$

$x_{1/2} = +\frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{4}{3}}$

$x_1 = 6{,}9$

$[x_2 = -0{,}2]$

$G''(6{,}9) = -6 \cdot 6{,}9 + 20 = -21{,}4 < 0 \Rightarrow Max$

$\underline{G(6{,}9) = 125{,}2\ GE}$

Nein, er macht 40,5 GE weniger Gewinn.

(Achtung: Verlust ist es erst bei negativen Zahlen.)

5

4.) $HP = 61$ GE

$SM = 122$ ME $\Rightarrow (122|0)$

$p(x) = m \cdot x + b$ $b = HP$ also $b = 61$

$p(x) = m \cdot x + 61$ einsetzen des Punktes $(122|0)$

$0 = m \cdot 122 + 61 \quad |-61$

$-61 = m \cdot 122 \quad |:122$

$-0{,}5 = m$

$p(x) = -0{,}5x + 61$

$E(x) = -0{,}5x^2 + 61x$

$k'(x) = 1{,}5x^2 - 12x + 25$ aufleiten

$k(x) = 0{,}5x^3 - 6x^2 + 25x + k_{fix}$

k_{fix} ergibt sich aus 200 GE (Betriebsferien)

Variable Kosten $= 0$
fixe Kosten bleiben

$\Rightarrow k(x) = 0{,}5x^3 - 6x^2 + 25x + 200$

$G(x) = E(x) - k(x)$

$= -0{,}5x^2 + 61x - (0{,}5x^3 - 6x^2 + 25x + 200)$

$G(x) = -0{,}5x^3 + 5{,}5x^2 + 36x - 200$

$G(x) = 0$ Gewinnschwelle / -grenze = zone

$0 = -0{,}5x^3 + 5{,}5x^2 + 36x - 200 \quad |:(-0{,}5)$

$0 = x^3 - 11x^2 - 72x + 400$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ GS

Fortsetzung Nr. 4

$$(x^3 - 11x^2 - 72x + 400) : (x-4) = x^2 - 7x - 100$$
$$\underline{-(x^3 - 4x^2)}$$
$$-7x^2 - 72x$$
$$\underline{-(-7x^2 + 28x)}$$
$$-100x + 400$$
$$\underline{-(-100x + 400)}$$
$$0$$

$$x^2 - 7x - 100 = 0$$
$$x_{2/3} = +3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 + 100}$$
$$x_2 = 14{,}1 \text{ GG}$$
$$[x_3 = -7{,}1]$$

Die Gewinnzone beträgt $14{,}1 - 4 = 10{,}1$ ME.

$$G'(x) = -1{,}5x^2 + 11x + 36$$
$$G''(x) = -3x + 11$$

$$G'(x) = 0$$
$$0 = -1{,}5x^2 + 11x + 36 \mid :(-1{,}5) \quad [: \tfrac{3}{2} = \cdot \tfrac{2}{3}]$$
$$0 = x^2 - \frac{22}{3}x - 24$$
$$x_{1/2} = +\frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{121}{9} + 24}$$
$$x_1 = 9{,}8$$
$$[x_2 = -2{,}5]$$

$$G''(9{,}8) = -18{,}4 < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

$$p(9{,}8) = -0{,}5 \cdot 9{,}8 + 61 = 56{,}1 \text{ GE}$$
$$\underline{C(9{,}8 \mid 56{,}1)}$$

5.) Exponentialaufgabe

a) See 1

$c = 190$
$a = 0{,}8$

$\underline{f(x) = 190 \cdot 0{,}8^{x-2}}$

See 2

$c = 0{,}5$
$a = 3$

$\underline{f(x) = 0{,}5 \cdot 3^{x+1}}$

5.) b) gleichsetzen

$$190 \cdot 0{,}8^{x-2} = 0{,}5 \cdot 3^{x+1}$$

zwei Lösungswege

I

$$190 \cdot 0{,}8^{x-2} = 0{,}5 \cdot 3^{x+1} \quad | :0{,}5$$

$$380 \cdot 0{,}8^{x-2} = 3^{x+1} \quad | \log$$

$$\log 380 + (x-2) \cdot \log 0{,}8 = (x+1) \cdot \log 3$$

$$\log 380 + x \cdot \log 0{,}8 - 2 \cdot \log 0{,}8 = x \cdot \log 3 + 1 \cdot \log 3 \quad | \text{umstellen}$$

$$\log 380 - 2 \cdot \log 0{,}8 - \log 3 = x \cdot \log 3 - x \cdot \log 0{,}8 \quad | \text{ausklammern}$$

$$\log 380 - 2 \cdot \log 0{,}8 - \log 3 = x(\log 3 - \log 0{,}8) \quad | :(\;)$$

$$\frac{\log 380 - 2 \cdot \log 0{,}8 - \log 3}{\log 3 - \log 0{,}8} = x$$

$$4{,}001 = x$$

also

$$4 = x$$

II

$$190 \cdot 0{,}8^{x-2} = 0{,}5 \cdot 3^{x+1} \quad | \text{Potenzgesetze}$$

$$190 \cdot 0{,}8^{x} : 0{,}8^{2} = 0{,}5 \cdot 3^{x} \cdot 3^{1}$$

$$\underbrace{190 : 0{,}8^{2}} \cdot 0{,}8^{x} = 0{,}5 \cdot 3^{1} \cdot 3^{x}$$

$$296{,}875 \cdot 0{,}8^{x} = 1{,}5 \cdot 3^{x} \quad | :1{,}5 \quad [\cdot \tfrac{2}{3}]$$

$$\boxed{296{,}875 = \frac{2375}{8}}$$

$$\frac{2375}{12} \cdot 0{,}8^{x} = 3^{x} \quad | :0{,}8^{x}$$

$$\frac{2375}{12} = \left(\frac{3}{0{,}8}\right)^{x}$$

$$\frac{2375}{12} = 3{,}75^{x} \quad | \log$$

Fortsetzung Nr. 5b)

$$\log \frac{2375}{12} = x \cdot \log 3{,}75 \quad | : \log 3{,}75$$

$$\frac{\log \frac{2375}{12}}{\log 3{,}75} = x$$

$$4{,}001 = x$$

$$4 = x$$

Nach 4 Wochen ist auf beiden Seen die gleiche Fläche mit Algen bedeckt.

c) $f(x) = 190 \cdot 0{,}8^{x-2}$

$$0{,}5 = 190 \cdot 0{,}8^{x-2} \quad | : 190$$

$$\frac{1}{380} = 0{,}8^{x-2} \quad | \log$$

$$\log \frac{1}{380} = (x-2) \cdot \log 0{,}8$$

$$\log \frac{1}{380} = x \cdot \log 0{,}8 - 2 \cdot \log 0{,}8 \quad | + 2 \cdot \log 0{,}8$$

$$\log \frac{1}{380} + 2 \cdot \log 0{,}8 = x \cdot \log 0{,}8 \quad | : \log 0{,}8$$

$$\frac{\log \frac{1}{380} + 2 \cdot \log 0{,}8}{\log 0{,}8} = x$$

$$28{,}620 = x$$

Nach 28,620 Wochen sind nur noch $0{,}5\,m^2$ da.

d) $f(x) = 0{,}5 \cdot 3^{x+1}$ $\quad t = 5 \quad$ $\frac{364{,}5 \cdot 100}{15} = 2430\,m^2$

$f(5) = 364{,}5\,m^2 \mathrel{\hat{=}} 15\,\%$

Der zweite See ist $2430\,m^2$ groß.