Lösungen Z 16

<u>Aufgabe 1</u>

$f(x) = 0$

$0 = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ Polynomdivision mit $x_1 = -1$ ergibt

$0 = x^2 - 6x + 8$ p-q-Formel liefert $x_2 = 4$ und $x_3 = 2$

$$A_1 = \int_{-1}^{2} (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)dx \qquad A_2 = \left| \int_{2}^{4} (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)dx \right|$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 8x \right]_{-1}^{2} \qquad A_2 = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 8x \right]_{2}^{4} \right|$$

$$A_1 = \left[\frac{32}{3} \right] - \left[-\frac{61}{12} \right] \qquad A_2 = \left| \left[\frac{16}{3} \right] - \left[\frac{32}{3} \right] \right| = \left| -\frac{16}{3} \right|$$

$$A_1 = 15{,}75FE \qquad A_2 = 5{,}3FE$$

$$A = A_1 + A_2 = 15{,}75 + 5{,}3 = 21{,}1FE$$

<u>Aufgabe 2</u>

$f(x) = p(x)$

$-0{,}5x^3 + 4x^2 - 6x + 3 = 0{,}5x^2 - 3x + 3 \;|\; + 0{,}5x^3 - 4x^2 + 6x - 3$

$0 = 0{,}5x^3 - 3{,}5x^2 + 3x \;|\; : 0{,}5$

$0 = x^3 - 7x^2 + 6x$ Ausklammern von $x_1 = 0$ ergibt

$0 = x^2 - 7x + 6$ p-q-Formel liefert $x_2 = 6$ und $x_3 = 1$

$$A_1 = \int_{0}^{1} (0{,}5x^3 - 3{,}5x^2 + 3x)dx \qquad A_2 = \left| \int_{1}^{6} (0{,}5x^3 - 3{,}5x^2 + 3x)dx \right|$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{0}^{1} \qquad A_2 = \left| \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{1}^{6} \right|$$

$$A_1 = \left[\frac{11}{24} \right] - [0] \qquad A_2 = \left| [-36] - \left[\frac{11}{24} \right] \right| = |-36{,}5|$$

$$A_1 = 0{,}5FE \qquad A_2 = 36{,}5FE$$

$$A = A_1 + A_2 = 0{,}5 + 36{,}5 = 37FE$$

<u>Aufgabe 3</u>

$$A = \int_{a}^{0} (x^3 - 9x)dx$$

$$A = \left[0{,}25x^4 - 4{,}5x^2 \right]_{a}^{0}$$

$$14 = [0] - \left[0{,}25a^4 - 4{,}5a^2 \right]$$

$0 = -0{,}25a^4 + 4{,}5a^2 - 14 \;|\; : -0{,}25$

$0 = a^4 - 18a^2 + 56$ Substitution mit $a^2 = z$

$0 = z^2 - 18z + 56$ p-q-Formel liefert $z_1 = 14$ und $z_2 = 4$

Resubstitution mit $z = a^2$

$a^2 = 14 \,|\, \sqrt{\;}$ $\quad a_1 = 3{,}7$ und $a_2 = -3{,}7$

$a^2 = 4 \,|\, \sqrt{\;}$ $\quad a_3 = 2$ und $a_4 = -2$

Da a < 0 sein soll, kommen die Lösungen $a_1 = 3{,}7$ und $a_3 = 2$ nicht in Frage.
Um zu klären welche der beiden übrigen Lösungen die richtige ist, muss man die Nullstellen der Funktion berechnen.

$f(x) = 0$

$0 = x^3 - 9x$ Ausklammern von $x_1 = 0$ ergibt

$0 = x^2 - 9$ Umformen, Wurzel ziehen liefert $x_2 = 3$ und $x_3 = -3$

Da die kleinste Nullstelle bei $x_3 = -3$ liegt, entfällt die Lösung $a_2 = -3{,}7$. Somit ist die Grenze $a_4 = -2$ die richtige Lösung.

Aufgabe 4

a)

Da Achsensymmetrie vorliegt, kann man nur die Fläche im positiven x-Werte Bereich berechnen und dann verdoppeln.
Aus der Zeichnung kann man entnehmen, dass im Intervall $[0;2]$ noch eine Nullstelle existiert, die bei der Flächenberechnung zu berücksichtigen ist.

$f(x) = 0$

$0 = x^2 - 1$ Umformen, Wurzel ziehen liefert $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

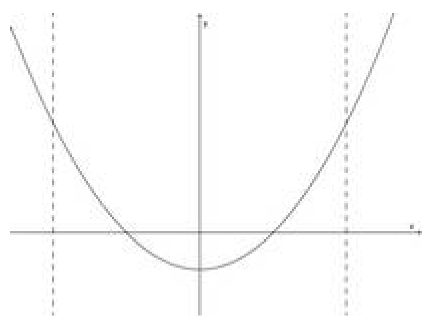
Also muss man zwei Flächen berechnen.

$$A_1 = \left| \int_0^1 (x^2 - 1)dx \right| \qquad A_2 = \int_1^2 (x^2 - 1)dx$$

$$A_1 = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_0^1 \right| \qquad A_2 = \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^2$$

$$A_1 = \left| \left[-\frac{2}{3} \right] - [0] \right| = \left| -\frac{2}{3} \right| \qquad A_2 = \left[\frac{2}{3} \right] - \left[-\frac{2}{3} \right]$$

$$A_1 = 0{,}7FE \qquad A_2 = 1{,}3FE$$



$A_{rechts} = A_1 + A_2 = 0{,}7 + 1{,}3 = 2FE$

Die Gesamtfläche beträgt somit $A_{gesamt} = 2 \cdot A_{rechts} = 2 \cdot 2 = 4FE$

b)

Für die Volumenberechnung muss man die Funktion quadrieren. Nun spielen Nullstellen keine Rolle mehr.

$$(f(x))^2 = (x^2 - 1)^2 = (x^2 - 1)(x^2 - 1) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (x^4 - 2x^2 + 1)dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-2}^{2}$$

$$V = \pi \left(\left[\frac{46}{15} \right] - \left[-\frac{46}{15} \right] \right) \quad => \quad V = \pi \left(\frac{92}{15} \right) = 19{,}3VE$$

Aufgabe 5

Zuerst sollte man hier die Schnittpunkte und die gesamte Fläche berechnen.
Für positive Flächen muss man die obere minus die untere Funktion rechnen.

$$p(x) - g(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 5 - (-x + 2)$$

$$= -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 5 + x - 2$$

$$= -0{,}5x^2 + 2{,}5x + 3$$

$$p(x) - g(x) = 0$$

$$0 = -0{,}5x^2 + 2{,}5x + 3 \,\Big|\, :(-0{,}5)$$

$0 = x^2 - 5x - 6$ p-q-Formel liefert $x_1 = 6$ und $x_2 = -1$

$$A = \int_{-1}^{6} (-0{,}5x^2 + 2{,}5x + 3)dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 3x \right]_{-1}^{6}$$

$$A = [27] - \left[-\frac{19}{12} \right]$$

$$A = 28{,}6FE$$

a)

$$A = \int_{-1}^{1} (-0{,}5x^2 + 2{,}5x + 3)dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 3x \right]_{-1}^{1}$$

$$A = \left[\frac{49}{12} \right] - \left[-\frac{19}{12} \right]$$

$$A = 5{,}7FE$$

b)

$$A = \int_{1}^{b} (-0{,}5x^2 + 2{,}5x + 3)dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 3x \right]_{1}^{b}$$

$$17{,}25 = \left[-\frac{1}{6}b^3 + \frac{5}{4}b^2 + 3b \right] - \left[\frac{49}{12} \right]$$

$$17{,}25 = -\frac{1}{6}b^3 + \frac{5}{4}b^2 + 3b - \frac{49}{12} \,\Big|\, -17{,}25$$

$$0 = -\frac{1}{6}b^3 + \frac{5}{4}b^2 + 3b - \frac{64}{3} \,\Big|\, :\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$0 = b^3 - 7{,}5b^2 - 18b + 128$ Polynomdivision mit $b_1 = 4$ ergibt

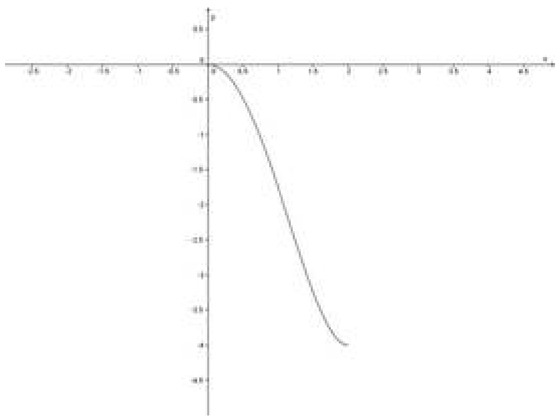
$0 = b^2 - 3{,}5b - 32$ p-q-Formel liefert $b_2 = 7{,}7$ und $b_3 = -4{,}2$

Da die beiden Grenzen der Gesamtfläche berechnet sind, kann man die Lösungen $b_2 = 7{,}7$ und $b_3 = -4{,}2$ ausschließen.

Die richtige Grenze ist $b_1 = 4$.

c)
$A_3 = A_{gesamt} - A_1 - A_2 = 28{,}6 - 5{,}7 - 17{,}25 = 5{,}65FE$

Aufgabe 6
a)
$f'(x) = x^3 - 4x$
$f''(x) = 3x^2 - 4$
$f'(x) = 0$
$0 = x^3 - 4x$ Ausklammern von $x_1 = 0$ führt zu
$0 = x^2 - 4$ Wurzel ziehen ergibt $x_2 = -2$ und $x_3 = 2$
$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow H$
$f''(-2) = 8 > 0 \Rightarrow T_1$
$f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow T_2$
Da das Intervall von Hoch- bis Tiefpunkt definiert ist, benötigt man nur von H und T_2 die y-Werte.
$f(0) = 0$ $H(0|0)$
$f(2) = -4$ $T_2(2|-4)$



b)
Da das Stück zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt rotieren soll, handelt es sich um das Intervall $[0;2]$. In diesem Intervall liegen keine weiteren Nullstellen.

$$A = \left|\int_0^2 (0{,}25x^4 - 2x^2)dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2\right|$$

$$A = \left|\left[-\frac{56}{15}\right] - [0]\right| = \left|-\frac{56}{15}\right|$$

$A = 3{,}7FE$

c)
$$(f(x))^2 = (0{,}25x^4 - 2x^2)^2 = (0{,}25x^4 - 2x^2)(0{,}25x^4 - 2x^2) = \frac{1}{16}x^8 - x^6 + 4x^4$$

$$V = \pi\int_0^2 (\frac{1}{16}x^8 - x^6 + 4x^4)dx$$

$$V = \pi\left[\frac{1}{144}x^9 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{4}{5}x^5\right]_0^2$$

$V = \pi([10{,}9] - [0])$
$V = 34{,}2VE$
Da nur der Durchmesser des Deckels angegeben ist, benötigt man den y-Wert des Tiefpunktes für die Umrechnung in cm³.
$f(2) = -4$

4 Einheiten entsprechen dem Radius (10 cm) des Deckels. => 1 LE = 2,5 cm
1 VE = $(2,5 \text{ cm})^3$ = 15,625 cm^3
$V = 34{,}2 \cdot 15{,}625 = 534{,}4 \text{cm}^3$

d)
Dichte = Masse / Volumen
Masse = Dichte • Volumen
Masse = 4 g/cm^3 • 534,4 cm^3
Masse = 2137,6 g
Masse Deckel + Masse Griff = 2137,6 g + 60 g = 2197,6 g = 2,2 kg

(Aus diesem Grund ist der Deckel innen eigentlich nicht massiv, sondern der Außenform angepasst.)