Lösungen X 14

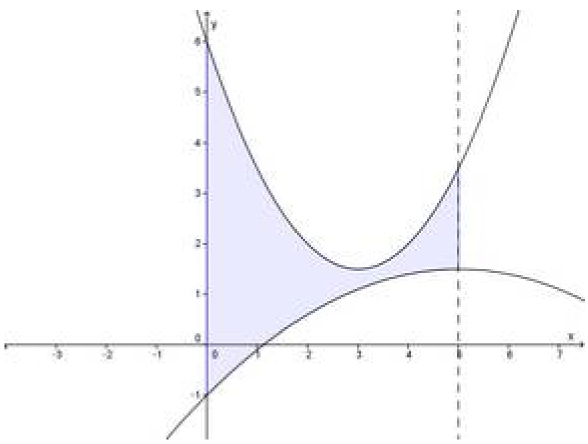
Aufgabe 1
Man muss zuerst für jede Funktion die Fläche berechnen, die mit der x-Achse eingeschlossen wird. Dann ermittelt man durch Differenzrechnung den Streifen dazwischen.
Schnittpunkte kann man nicht bestimmen, da sich die Funktionen nicht schneiden.
Außerdem gelten für jede Funktion andere Grenzen.
Die Grenzen für $f_1(x)$ sind der Zeichnung zu entnehmen, für $f_2(x)$ müssen sie berechnet werden.

$$A_1 = \int_0^{12} (-0{,}3x^2 + 3{,}6x)dx$$
$$A_1 = \left[-0{,}1x^3 + 1{,}8x^2\right]_0^{12}$$
$$A_1 = [86{,}4] - [0]$$
$$A_1 = 86{,}4FE$$

$$f_2(x) = 0$$
$$0 = -0{,}6x^2 + 7{,}2x - 12 \,|: (-0{,}6)$$
$0 = x^2 - 12x + 20$ p-q-Formel liefert $x_1 = 10$ und $x_2 = 2$
$$A_2 = \int_2^{10} (-0{,}6x^2 + 7{,}2x - 12)dx$$
$$A_2 = \left[-0{,}2x^3 + 3{,}6x^2 - 12x\right]_2^{10}$$
$$A_2 = [40] - [-11{,}2]$$
$$A_2 = 51{,}2FE$$

$$A = A_1 - A_2 = 86{,}4 - 51{,}2 = 35{,}2FE$$
Der Streifen hat eine Fläche von 35,2 FE.

Aufgabe 2
Die von beiden Funktionen begrenzte Fläche ist die Fläche zwischen den beiden Funktionen.
Die Grenzen werden aus der Zeichnung abgelesen.
Die Funktion zum Aufleiten bildet sich aus der Differenz der beiden Funktionen.

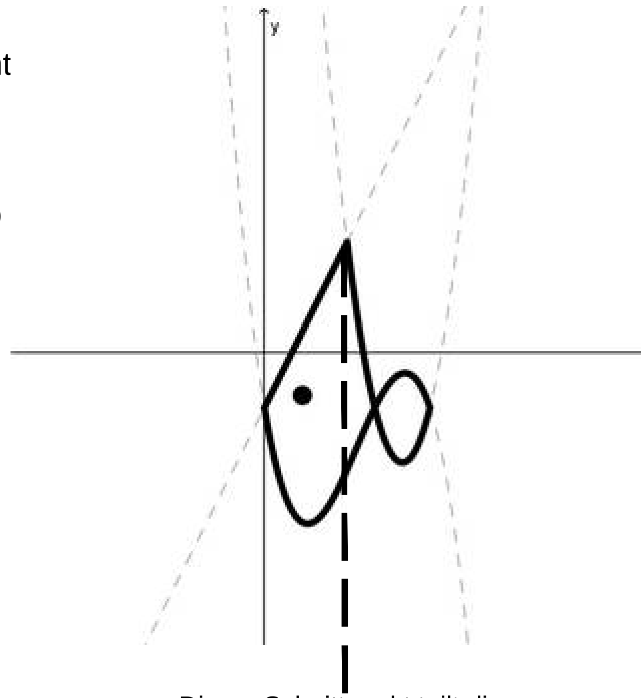


$$A = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$
Wobei man darauf achten sollte, dass man die obere Funktion minus die untere Funktion rechnet, da man dadurch einen positiven Wert für die Fläche erhält und somit keine Betragstriche benötigt.
$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6 - (-\frac{1}{10}x^2 + x - 1)$$
$$= 0{,}5x^2 - 3x + 6 + 0{,}1x^2 - x + 1$$
$$= 0{,}6x^2 - 4x + 7$$

$$A = \int_0^5 (0{,}6x^2 - 4x + 7)dx$$
$$A = \left[0{,}2x^3 - 2x^2 + 7x\right]_0^5$$
$$A = [10] - [0]$$
$$A = 10FE$$

Aufgabe 3

Die Gesamtfläche des Fisches bestimmt man mithilfe von Schnittpunkten der jeweils beteiligten Funktionen.
Der erste Schnittpunkt von f(x) und g(x) wird aus der Zeichnung mit x = 0 (y-Achse) entnommen.
Die Rückenflosse (Spitze) wird aus p(x) und g(x) gebildet. Der Schwanz aus p(x) und f(x).
Somit muss man drei Flächenteile berechnen und dann zur Gesamtfläche addieren.



Dieser Schnittpunkt teilt die vordere Fläche in zwei Teile.

zweiter Schnittpunkt
$$g(x) = p(x)$$
$$2x - 1 = 4x^2 - 20x + 23 \,|\, -2x + 1$$
$$0 = 4x^2 - 22x + 24 \,|\, : 4$$
$$0 = x^2 - 5{,}5x + 6$$
p-q-Formel liefert $x_1 = 4$ und $x_2 = 1{,}5$
Die Stelle x_1 liegt ganz rechts oben und somit außerhalb unseres Fisches.
dritter und vierter Schnittpunkt
$$f(x) = p(x)$$
$$-x^3 + 5x^2 - 6x - 1 = 4x^2 - 20x + 23 \,|\, + x^3 - 5x^2 + 6x + 1$$
$0 = x^3 - x^2 - 14x + 24$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt
$0 = x^2 + x - 12$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 3$ und $x_3 = -4$
Die Stelle x_3 liegt links außerhalb unseres Fisches.

Flächenberechnung:

$$A_1 = \int_0^{1,5} (g(x) - f(x))dx \qquad \Rightarrow 2x - 1 - (-x^3 + 5x^2 - 6x - 1) = 2x - 1 + x^3 - 5x^2 + 6x + 1$$
$$A_1 = \int_0^{1,5} (x^3 - 5x^2 + 8x)dx$$ (zusammengefasste Funktion)
$$A_1 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^{1,5}$$
$$A_1 = [4{,}6] - [0]$$
$$A_1 = 4{,}6FE$$

$$A_2 = \int_{1,5}^{2} (p(x) - f(x))dx \qquad \Rightarrow 4x^2 - 20x + 23 - (-x^3 + 5x^2 - 6x - 1) = 4x^2 - 20x + 23 + x^3 - 5x^2 + 6x + 1$$

$$A_2 = \int_{1,5}^{2} (x^3 - x^2 - 14x + 24)dx$$ (zusammengefasste Funktion)

$$A_2 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 24x\right]_{1,5}^{2}$$

$$A_2 = [21,3] - [20,4]$$

$$A_2 = 0,9FE$$

$$A_3 = \int_{2}^{3} (f(x) - p(x))dx$$

Für A_2 hat man schon die Differenz der beiden Funktionen berechnet. Da nun aber f(x) oben liegt, benötigt man hier Betragstriche.

$$A_3 = \left|\int_{2}^{3} (x^3 - x^2 - 14x + 24)dx\right|$$

$$A_3 = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 24x\right]_{2}^{3}\right|$$

$$A_3 = [20,3] - [21,3]$$

$$A_3 = 1,0FE$$

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 4,6 + 0,9 + 1,0 = 6,5FE$ (gesamter Fisch)

$1LE = 10cm \Rightarrow !FE = 100cm^2$

$A = 650cm^2$ (gesamter Fisch)

Fläche des Auges: $A = \pi \cdot r^2$

$A = \pi \cdot 2^2 = 12,6cm^2$

$A_{gesucht} = 650 - 12,6 = 637,4cm^2$

Die zu färbende Fläche beträgt 650 cm².

Aufgabe 4

a)

Es handelt sich um eine quadratische Funktion.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

Aus der Zeichnung lassen sich folgende Angaben ablesen:

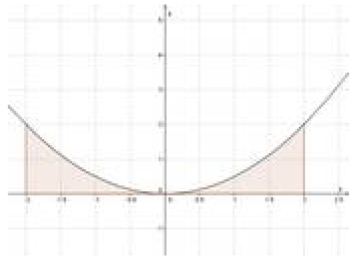
Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$S(0\|0)$	$f(0) = 0$	I $0 = c$
$P(2\|2)$	$f(2) = 2$	II $2 = 4a + 2b + c$
$x = 0; m = 0$	$f'(0) = 0$	III $0 = b$

Einsetzen der beiden Variablen b und c ergibt: $2 = 4a \quad \Rightarrow a = 0,5$

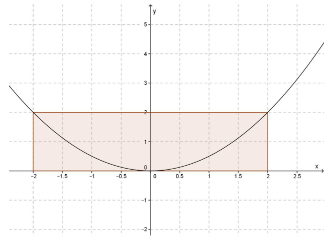
$f(x) = 0,5x^2$

b)

Mithilfe der Integralrechnung erhält man nur die Fläche unterhalb der Funktion (zwischen Funktion und x-Achse).

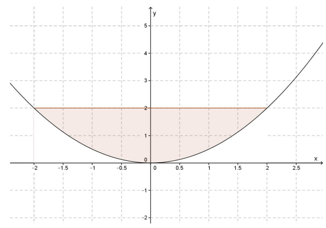


$$A=\int_{-2}^{2}(0{,}5x^2)dx=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-2}^{2}=\left[\frac{4}{3}\right]-\left[-\frac{4}{3}\right]=2{,}7FE$$



Um die Fläche in der Parabel zu ermitteln, muss man das Rechteck berechnen, das die Parabel umgibt.

$A=4\cdot 2=8FE$



Durch Differenzrechnung erhält man die Fläche in der Parabel (Dachrinne).

$A=8-2{,}7=5{,}3FE$

Umrechnung der FE in cm²

Breite Dachrinne: 20 cm

Breite der Parabel im Koordinatensystem: 4 LE

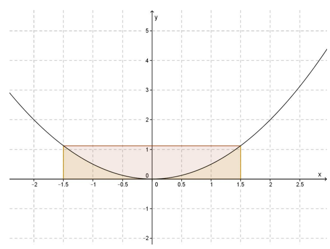
=> 1 LE = 5 cm => 1 FE = 25 cm²

Die Fläche der Dachrinne beträgt $A=5{,}3\cdot 25=132{,}5cm^2$

Das Volumen der Dachrinne beträgt $V=132{,}5\cdot 800=106000cm^3=106dm^3=106Liter$.

c)

Die Höhe muss auf LE umgerechnet werden.



$y=5{,}6:5=1{,}12LE$

Um nun erneut das Volumen bestimmen zu können, benötigt man die x-Werte (Breite) des Wassers in der Dachrinne.

$1{,}12=0{,}5x^2 \,|\, :0{,}5$

$2{,}24=x^2 \,|\, \sqrt{\ }$

$\pm 1{,}5=x_{1/2}$

$A=\int_{-1,5}^{1,5}(0{,}5x^2)dx=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-1,5}^{1,5}=\left[\frac{9}{16}\right]-\left[-\frac{9}{16}\right]=1{,}1FE$ (unterhalb der Funktion)

$A=3\cdot 1{,}12=3{,}36FE$ (Rechteck)

$A=3{,}36-1{,}1=2{,}26FE$

$A=2{,}26\cdot 25=56{,}5cm^2$

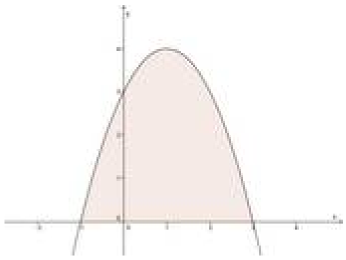
$V=56{,}5\cdot 800=45200cm^3=45{,}2dm^3=45{,}2Liter$

Das Volumen des Wassers beträgt nun 45,2 Liter.

Aufgabe 5

a)

Fläche mit der x-Achse => Nullstellen



$f(x) = 0$

$0 = -x^2 + 2x + 3 \,|\, :(-1)$

$0 = x^2 - 2x - 3$

$x_{1/2} = +1 \pm \sqrt{1+3}$

$x_1 = 3$ und $x_2 = -1$

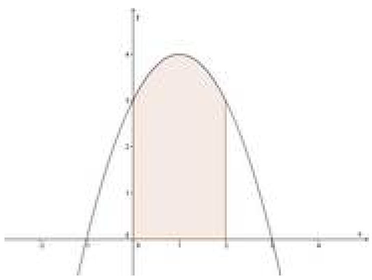
$$A = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = [9] - [-1{,}7] = 10{,}7FE$$

b)

Die obere Grenze ist unbekannt. Dennoch setzt man wie gewohnt das Integral an und leitet auf. Mit dem Einsetzen der Grenzen und des Flächeninhalts erhält man eine Gleichung mit der Variablen b, die man lösen kann.

$$A = \int_{0}^{b} (-x^2 + 2x + 3)dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{0}^{b}$$



$$\frac{22}{3} = \left[-\frac{1}{3}b^3 + b^2 + 3b\right] - [0] \,\Big|\, -\frac{22}{3}$$

$$0 = -\frac{1}{3}b^3 + b^2 + 3b - \frac{22}{3} \,\Big|\, :\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$0 = b^3 - 3b^2 - 9b + 22$ Polynomdivision mit $b_1 = 2$ ergibt

$0 = b^2 - b - 11$ p-q-Formel liefert $b_2 = 3{,}9$ und $b_3 = -2{,}9$

Die Lösungen von b_2 und b_3 liegen außerhalb der in Aufgabe a) berechneten Grenzen (außerhalb der Fläche).

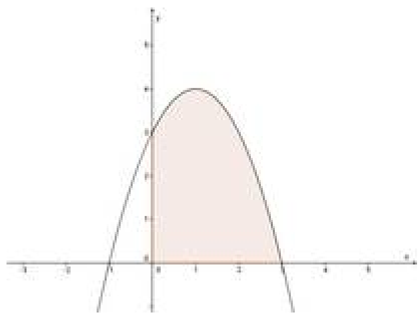
Deshalb ist $b_1 = 2$ die richtige Lösung.

c)

Die untere Grenze ist unbekannt. Man verfährt wie in Aufgabe b).

$$A = \int_{a}^{3} (-x^2 + 2x + 3)dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{a}^{3}$$



$$9 = [9] - \left[-\frac{1}{3}a^3 + a^2 + 3a\right]$$ (Klammern auflösen)

$$9 = 9 + \frac{1}{3}a^3 - a^2 - 3a \,|\, -9$$

$$0 = \frac{1}{3}a^3 - a^2 - 3a \,\Big|\, :\frac{1}{3}$$

$0 = a^3 - 3a^2 - 9a$

$0 = a(a^2 - 3a - 9)$ Ausklammern mit $a_1 = 0$ ergibt

$0 = a^2 - 3a - 9$ p-q-Formel liefert $a_2 = 4{,}9$ und $a_3 = -1{,}9$

Die Lösungen von a_2 und a_3 liegen außerhalb der in Aufgabe a) berechneten Grenzen (außerhalb der Fläche).
Deshalb ist $a_1 = 0$ die richtige Lösung.

Aufgabe 6

$$A = \int_2^b (4x^3 - 6x)dx$$

$$A = \left[x^4 - 3x^2\right]_2^b$$

$$50 = \left[b^4 - 3b^2\right] - [4] \, | -50$$

$0 = b^4 - 3b^2 - 54$ Substitution mit $b^2 = z$

$0 = z^2 - 3z - 54$ p-q-Formel liefert $z_1 = 9$ und $z_2 = -6$

Resubstitution mit $z = b^2$

$b^2 = 9 \,|\sqrt{\ }$ $\Rightarrow b_1 = 3$ und $b_2 = -3$

$b^2 = -6 \,|\sqrt{\ }$ nicht lösbar

Da b>0 sein soll, kommt nur die Lösung $b_1 = 3$ in Frage.

Aufgabe 7

In der Funktion sind die einzelnen Koeffizienten unbekannt. Es soll die Fläche zwischen Graph und x-Achse bestimmt werden, also benötig man die Nullstellen.

$f(x) = 0$

$0 = ax^2 + 2ax - 8a \,|: a$ Da a < 0 sein soll, darf man durch a dividieren.

$0 = x^2 + 2x - 8$ p-q-Formel liefert $x_1 = 2$ und $x_2 = -4$

Der Flächeninhalt ist angegeben, also leitet man auf und setzt die FE ein.

$$A = \int_{-4}^{2} (ax^2 + 2ax - 8a)dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}ax^3 + ax^2 - 8ax\right]_{-4}^{2}$$

$$18 = \left[\frac{8}{3}a + 4a - 16a\right] - \left[-\frac{64}{3}a + 16a + 32a\right]$$

$$18 = \left[-\frac{28}{3}a\right] - \left[\frac{80}{3}a\right]$$

$$18 = -36a \,|: (-36)$$

$$a = -0{,}5$$

Die Variable a wird in der Funktionsgleichung ersetzt.

$$f(x) = -0{,}5x^2 - x + 4$$