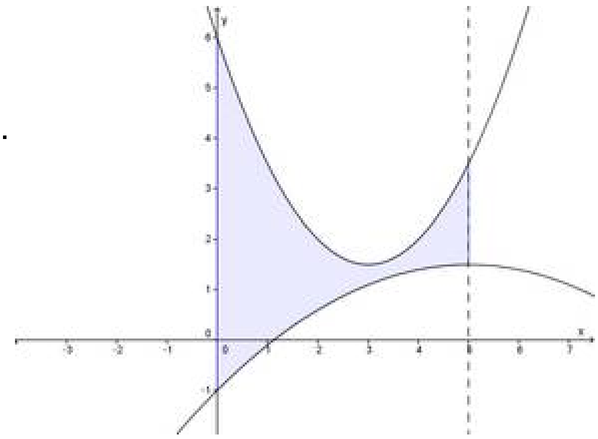
Lösungen W 16



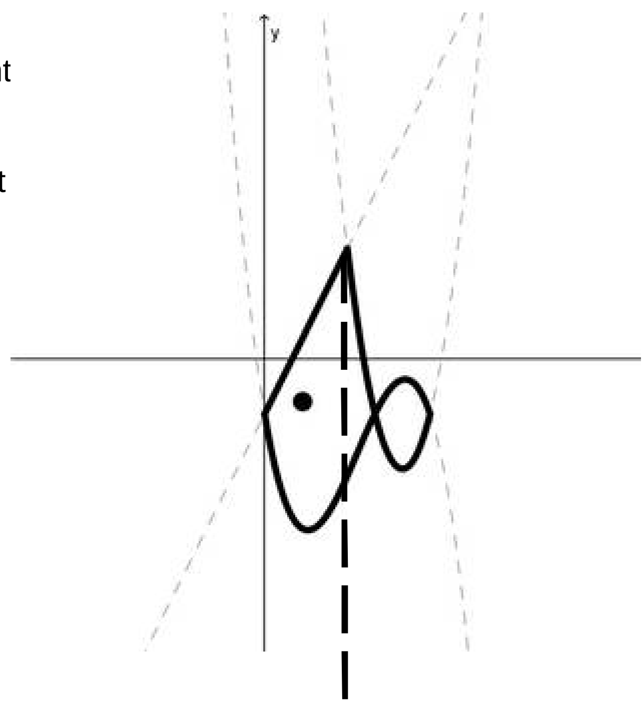
Aufgabe 1
Die von beiden Funktionen begrenzte Fläche ist die Fläche zwischen den beiden Funktionen.
Die Grenzen werden aus der Zeichnung abgelesen.
Die Funktion zum Aufleiten bildet sich aus der Differenz der beiden Funktionen oder durch Gleichsetzen.

$$A = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

Wenn man darauf achtet, dass man die obere Funktion minus die untere Funktion rechnet, und dadurch einen positiven Wert für die Fläche erhält, sind somit keine Betragstriche benötigt.

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6 - (-\frac{1}{10}x^2 + x - 1)$$
$$= 0{,}5x^2 - 3x + 6 + 0{,}1x^2 - x + 1$$
$$= 0{,}6x^2 - 4x + 7$$

$$A = \int_0^5 (0{,}6x^2 - 4x + 7)dx$$
$$A = \left[0{,}2x^3 - 2x^2 + 7x\right]_0^5$$
$$A = [10] - [0]$$
$$A = 10FE$$



Dieser Schnittpunkt teilt die vordere Fläche in zwei Teile.

Aufgabe 2
Die Gesamtfläche des Fisches bestimmt man mithilfe von Schnittpunkten der jeweils beteiligten Funktionen.
Der erste Schnittpunkt (das Maul) ergibt sich aus f(x) und g(x).
Die Rückenflosse (Spitze) wird aus p(x) und g(x) gebildet. Der Schwanz aus p(x) und f(x).
Somit muss man drei Flächenteile berechnen und dann zur Gesamtfläche addieren.
Schnittpunkte:

$f(x) = g(x)$

$x_1 = 0$ und $x_{2/3} = n.l.$

$g(x) = p(x)$

$x_1 = 4$ und $x_2 = 1{,}5$

Die Stelle x_1 liegt ganz rechts oben und somit außerhalb unseres Fisches.

$f(x) = p(x)$

$x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ und $x_3 = -4$

Die Stelle x_3 liegt links außerhalb unseres Fisches.

Flächenberechnung:

$$A_1 = \int_0^{1{,}5} (x^3 - 5x^2 + 8x)dx$$ (zusammengefasste Funktion aus g(x) und f(x))

$$A_1 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^{1{,}5}$$

$$A_1 = \left[\frac{297}{64}\right] - [0]$$

$$A_1 = \frac{297}{64}FE \approx 4{,}6FE$$

$$A_2 = \int_{1{,}5}^{2} (x^3 - x^2 - 14x + 24)dx$$ (zusammengefasste Funktion aus p(x) und f(x))

$$A_2 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 24x\right]_{1{,}5}^{2}$$

$$A_2 = \left[\frac{64}{3}\right] - \left[\frac{1305}{64}\right]$$

$$A_2 = \frac{181}{192}FE \approx 0{,}9FE$$

Für A_2 hat man schon die Differenz der beiden Funktionen berechnet. Da nun aber f(x) oben liegt, benötigt man hier Betragstriche.

$$A_3 = \left|\int_2^3 (x^3 - x^2 - 14x + 24)dx\right|$$

$$A_3 = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 24x\right]_2^3\right|$$

$$A_3 = \left|\left[\frac{81}{4}\right] - \left[\frac{64}{3}\right]\right|$$

$$A_3 = \left|-\frac{13}{12}\right|$$

$$A_3 = \frac{13}{12}FE \approx 1{,}1FE$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{297}{64} + \frac{181}{192} + \frac{13}{12} = \frac{20}{3}FE \approx 6{,}7FE$$ (gesamter Fisch)

Addiert man die gerundeten Zahlen erhält man 6,6 FE.

$1LE = 10cm \Rightarrow 1FE = 100cm^2$ => $A = 667cm^2$ (genaue Zahl, gesamter Fisch)

Fläche des Auges: $A = \pi \cdot r^2$ => $A = \pi \cdot 2^2 = 12{,}6cm^2$

$A_{gesucht} = 667 - 12{,}6 = 654{,}4cm^2$

Die zu färbende Fläche beträgt 654,4 cm².

Aufgabe 3

a) Es handelt sich um eine quadratische Funktion, die achsensymmetrisch ist.

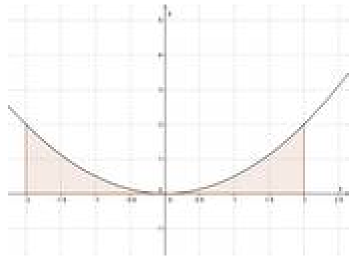
$f(x) = ax^2 + b$

Aus der Zeichnung lassen sich folgende Angaben ablesen:

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$S(0\|0)$	$f(0) = 0$	I $\quad 0 = b$
$P(2\|2)$	$f(2) = 2$	II $\quad 2 = 4a + b$

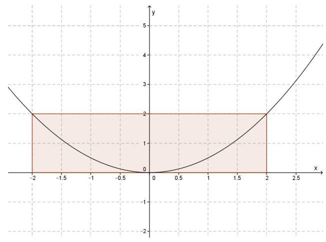
Einsetzen der Variable b ergibt: $2 = 4a \quad \Rightarrow a = 0{,}5$

$f(x) = 0{,}5x^2$



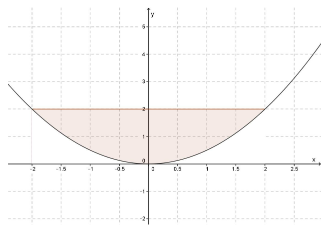
b) Mithilfe der Integralrechnung erhält man nur die Fläche unterhalb der Funktion (zwischen Funktion und x-Achse).

$$A = \int_{-2}^{2} (0{,}5x^2)dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{4}{3}\right] - \left[-\frac{4}{3}\right] = \frac{8}{3}FE \approx 2{,}7FE$$



Um die Fläche in der Parabel zu ermitteln, muss man das Rechteck berechnen, das die Parabel umgibt.

$A = 4 \cdot 2 = 8FE$



Durch Differenzrechnung erhält man die Fläche in der Parabel (Dachrinne).

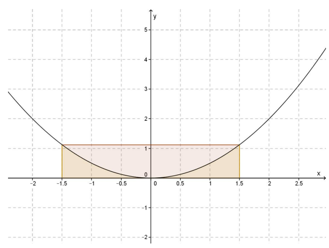
$A = 8 - 2{,}7 = 5{,}3FE$

Umrechnung der FE in cm²: Breite Dachrinne: 20 cm

Breite der Parabel im Koordinatensystem: 4 LE => 1 LE = 5 cm => 1 FE = 25 cm²

Die Fläche der Dachrinne beträgt $A = 5{,}3 \cdot 25 = 132{,}5cm^2$

Das Volumen der Dachrinne beträgt $V = 132{,}5 \cdot 800 = 106000cm^3 = 106dm^3 = 106Liter$.



c) Die Höhe muss auf LE umgerechnet werden.

$y = 5{,}6 : 5 = 1{,}12LE$

Um nun erneut das Volumen bestimmen zu können, benötigt man die x-Werte (Breite) des Wassers in der Dachrinne. $f(x) = 1{,}12$

$1{,}12 = 0{,}5x^2 \mid : 0{,}5 \mid \sqrt{}$

$\pm 1{,}5 = x_{1/2}$

$$A = \int_{-1{,}5}^{1{,}5} (0{,}5x^2)dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-1{,}5}^{1{,}5} = \left[\frac{9}{16}\right] - \left[-\frac{9}{16}\right] = \frac{9}{8}FE \approx 1{,}1FE \text{ (unterhalb der Funktion)}$$

$A = 3 \cdot 1{,}12 = 3{,}36FE$ (Rechteck)

$A = 3{,}36 - 1{,}1 = 2{,}26FE$ (in der Parabel)

$A = 2{,}26 \cdot 25 = 56{,}5cm^2$

$V = 56{,}5 \cdot 800 = 45200cm^3 = 45{,}2dm^3 = 45{,}2Liter$

Das Volumen des Wassers beträgt nun 45,2 Liter.