Lösungen V 14

<u>1. Aufgabe</u>

1.1

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(1) = 0$	I	$0 = 2a + b$
$f(5) = -6{,}5$	II	$-6{,}5 = 25a + 5b + c$
$f'(4) = 3$	III	$3 = 8a + b$

Lösen des Gleichungssystems:
Kombination von Gleichung I und III um b zu eliminieren, dann nacheinander $a = 0{,}5$; $b = -1$; $c = -14$ bestimmen

$g(x) = 0{,}5x^2 - x - 14$

1.2

$f(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}2x$

$f'(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}2$

$f''(x) = -0{,}6x$

$f'''(x) = -0{,}6$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$ / $x \to +\infty; f(x) \to -\infty$  **3.** PS **4.** $S_y(0|0)$ und für S_x $f(x) = 0$ =>

$0 = -0{,}1x^3 + 1{,}2x \,|: (-0{,}1)$

$0 = x^3 - 12x$ Ausklammern von x ergibt $x_1 = 0$ und

$0 = x^2 - 12$ Umstellen und Wurzel ziehen ergibt $x_2 = 3{,}5$ und $x_3 = -3{,}5$

$S_{x1}(0|0)$ $S_{x2}(3{,}5|0)$ $S_{x3}(-3{,}5|0)$

5. $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$0 = -0{,}3x^2 + 1{,}2 \,|: (-0{,}3)$

$0 = x^2 - 4$ Umstellen und Wurzel ziehen ergibt $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

$f''(2) = -1{,}2 < 0 \Rightarrow H$ $f(2) = 1{,}6$ $H(2|1{,}6)$

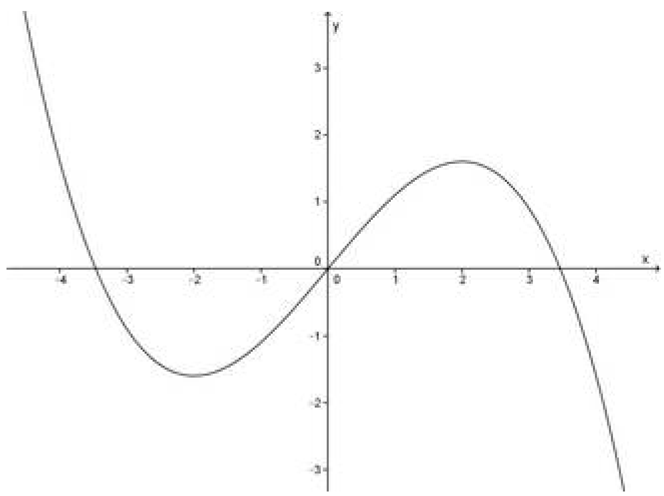
$f''(-2) = 1{,}2 > 0 \Rightarrow T$ $f(-2) = -1{,}6$ $T(-2|-1{,}6)$

6. $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$0 = -0{,}6x$

$0 = x$ $f'''(0) = -0{,}6 < 0 \Rightarrow L-R-K$ $f(0) = 0$ $W_{L-R}(0|0)$

7. Zeichnung



2. Aufgabe

2.1

Zuerst Schnittpunkte von f(x) und g(x) berechnen, dann Fläche über Integral ermitteln

$f(x) = g(x)$

$-0{,}1x^3 + 1{,}2x = 0{,}5x^2 - x - 14$ Umformen

$0 = 0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 - 2{,}2x - 14 \,|\, :(0{,}1)$

$0 = x^3 + 5x^2 - 22x - 140$ Polynomdivision mit $x_1 = 5$ liefert

$0 = x^2 + 10x + 28$ p-q-Formel ergibt negative Wurzel

=> keine weiteren Lösungen

$x \in [-3;5]$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

$$A = \int_{-3}^{5} (-0{,}1x^3 + 1{,}2x - (0{,}5x^2 - x - 14))dx$$

$$A = \int_{-3}^{5} (-0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 + 2{,}2x + 14)dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{40}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 1{,}1x^2 + 14x\right]_{-3}^{5}$$

$A = [61{,}04] - [29{,}625]$

$A = 90{,}7FE$

1 LE = 10 m => 1 FE = 100 m²

$90{,}7FE \cdot 100m^2 / FE = 9070m^2$

Der See hat eine Fläche von 9070 Quadratmeter.

2.2

Differenzrechnung der Funktionswerte von f(x) und g(x)

Staumauer $x = -3$

$f(-3) = -0{,}9$

$g(-3) = -6{,}5$

Differenzrechnung $d = -0{,}9 - (-6{,}5) = 5{,}6$

Da 1 LE = 10 m ergibt sich $5{,}6 \cdot 10m = 56m$

Die Staumauer hat eine Länge von 56 Metern.

2.3

Extremwertaufgabe

Gesucht: größte Breite des Sees = maximale Differenz der Funktionswerte

$D = f(x) - g(x)$ Hauptbedingung

$f(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}2x$

$g(x) = 0{,}5x^2 - x - 14$ Nebenbedingungen

$ID = [-3;5]$ (x-Wert Staumauer bis x-Wert von Schnittpunkt S)

$D(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 + 2{,}2x + 14$ Zielfunktion

$D'(x) = -0{,}3x^2 - x + 2{,}2$

$D''(x) = -0{,}6x - 1$

$D'(x) = 0 \wedge D''(x) \neq 0$

$0 = -0{,}3x^2 - x + 2{,}2 \,|\, : (-0{,}3)$

$0 = x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{22}{3}$ p-q-Formel ergibt $x_1 = 1{,}5$ und $[x_2 = -4{,}8]$

$D''(1{,}5) = -1{,}9 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$f(1{,}5) = 1{,}5$ $D = 1{,}5 - (-14{,}4)$

$g(1{,}5) = -14{,}4$ $D = 15{,}9\text{LE}$

$D(-3) = 5{,}6 < 15{,}9$

$D(5) = 0 < 15{,}9$

$15{,}9\text{LE} \cdot 10\text{m}/\text{LE} = 159\text{m}$

Der See hat seine größte Breite mit 159 Metern.

2.4

Überprüfung einer Geradengleichung auf tangentiale Eigenschaft im Intervall $[0;2]$

Die Gerade besitzt die Steigung $m = 1$. Gesucht: Stelle von f(x) mit $m = 1$

$f'(x) = m$

$1 = -0{,}3x^2 + 1{,}2 \,|\, -1{,}2$

$-0{,}2 = -0{,}3x^2 \,|\, : (-0{,}3)$

$\frac{2}{3} = x^2 \,|\, \sqrt{}$

$x_1 = 0{,}8$ und $[x_2 = -0{,}8]$

Berechnung der beiden Funktionswerte an dieser Stelle

$f(0{,}8) = 0{,}9$

$s(0{,}8) = 2{,}9$ Funktionswerte stimmen nicht überein. => keine Tangente

<u>3. Aufgabe</u>

3.1

Gewinnschwelle und –grenze berechnen

$p(x) = 90$

$E(x) = 90x$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 90x - (x^3 - 15x^2 + 84x + 64)$

$G(x) = -x^3 + 15x^2 + 6x - 64$

$G(x) = 0$

$0 = -x^3 + 15x^2 + 6x - 64 \,|\, : (-1)$

$0 = x^3 - 15x^2 - 6x + 64$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$ liefert

$x^2 - 13x - 32 = 0$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 15{,}1$ und $[x_3 = -2{,}1]$

GS = 2 ME

GG = 15,1 ME

Bei x < GS und x > GG entsteht Verlust.

Zwischen Gewinnschwelle und Gewinngrenze liegt die Gewinnzone, in der das Unternehmen Gewinn macht.

3.2

$G'(x) = -3x^2 + 30x + 6$ $\qquad G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(x) = -6x + 30$

$0 = -3x^2 + 30x + 6 \,|\, : (-3)$

$0 = x^2 - 10x - 2$ $\qquad$ p-q-Formel ergibt $x_1 = 10{,}2$ und $[x_2 = -0{,}2]$

$G''(10{,}2) = -31{,}2 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$G(10{,}2) = 496{,}6\text{GE}$

Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge liegt bei 10,2 ME und der maximale Gewinn beträgt 496,6GE.

3.3

Niedrigster Preis = KPU gesucht => $K(x) = x^3 - 15x^2 + 84x + 64$ und $k_V(x) = \frac{K_V(x)}{x}$

$k_V(x) = x^2 - 15x + 84$ $\qquad$ variable Stückkostenfunktion

$k_V'(x) = 2x - 15$

$k_V''(x) = 2$ $\qquad k_V'(x) = 0 \wedge k_V''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 15$

$x = 7{,}5\text{ME}$ BM (Betriebsminimum)

$k_V''(7{,}5) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$k_V(7{,}5) = 27{,}75\text{GE}$ KPU (Kurzfristige Preisuntergrenze)

Setzt man 7,5 ME zu diesem Preis ab, deckt man nur die variablen Kosten. Die fixen Kosten von 64 GE entstehen als Verlust. Deshalb ist dieser Preis nur kurzfristig haltbar.

3.4

LPU gesucht => $K(x) = x^3 - 15x^2 + 84x + 64$ und $k(x) = \frac{K(x)}{x}$

$k(x) = x^2 - 15x + 84 + \frac{64}{x}$ $\qquad$ Stückkostenfunktion

$k'(x) = 2x - 15 - \frac{64}{x^2}$

$k''(x) = 2 + \frac{128}{x^3}$ $\qquad k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 15 - \frac{64}{x^2} \,\Big|\, \cdot x^2$

$0 = 2x^3 - 15x^2 - 64 \,|\, : 2$

$0 = x^3 - 7{,}5x^2 - 32$ $\qquad$ Polynomdivision mit $x_1 = 8$ ergibt

$0 = x^2 + 0{,}5x + 4$ $\qquad$ p-q-Formel ergibt negative Wurzel
=> keine weiteren Lösungen

$k''(8) = 2{,}25 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$k(8) = 36\text{GE}$

Setzt man langfristig 8 ME zu diesem Preis ab, deckt man die gesamten Kosten. Es wird aber kein Gewinn erzielt und somit keine Rücklagen für Investitionen geschaffen. Das Bestehen des Betriebs ist gefährdet.