Lösungen U 17 / Teil III

1. Aufgabe

1.1

$f(2) = 33{,}8$

Nach zwei Jahren beträgt die Zuwachsrate 33,8 cm/Jahr. (Wachstumsgeschwindigkeit des Baumes)

1.2

$f(x_N) = 0$

$0 = \frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 22{,}5x$

TR: $x_{N1} = 15$

$x_{N2} = 0$

$x_{N1} = 15$ liegt außerhalb des Betrachtungszeitraumes / Definitionsbereichs.
(Sollte man aber diesen Wert berücksichtigen, würde er bedeuten, dass der Baum nach 15 Jahren nicht mehr wächst. Zuwachsrate = 0)
$x_{N2} = 0$ ist zur Zeit der Pflanzung. Da kann der Baum noch kein Wachstum zeigen.

1.3

$f(x) = \frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 22{,}5x$

$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 - 6x + 22{,}5$

$f''(x) = \frac{3}{5}x - 6$

$f'(x_E) = 0$

$0 = \frac{3}{10}x^2 - 6x + 22{,}5 \;\Big|\; : \frac{3}{10}$

$0 = x^2 - 20x + 75$ pq-Formel

$x_{E1} = 15$ und $x_{E2} = 5$

$f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(15) = 3 > 0 \Rightarrow T$ $f(15) = 0$ $T(15|0)$

$f''(5) = -3 < 0 \Rightarrow H$ $f(5) = 50$ $H(5|50)$

Der Tiefpunkt liegt nicht im Betrachtungszeitraum.
Der Hochpunkt gibt an, dass der Baum nach 5 Jahren die größte Wachstumsrate (schnellstes Wachstum) mit 50 cm/Jahr besitzt.

1.4

Zeigen Sie = mit Formeln oder Rechnungen belegen
$f(x) = F'(x)$ Die Funktion f(x) ist die Ableitung von F(x).

$$\int (\frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 22{,}5x)dx = \left[\frac{1}{40}x^4 - x^3 + 11{,}25x + c\right]$$

Durch Integrieren (Aufleiten) beweisen, dass F(x) entsteht. Hier muss man die Konstante c hinzufügen, da man ein unbestimmtes Integral angibt (Stammfunktion bildet).
Da die vorgegebene Stammfunktion als Konstante eine 20 hat, ist also $c = 20$.
Mit F(x) kann man nun die Höhe des Baumes bei seiner Pflanzung ermitteln.
Pflanzung = Zeitpunkt 0
$F(0) = 20$
Der Baum war zu Beginn 20 cm hoch.

1.5
Hier gibt es zwei Möglichkeiten das Ergebnis zu berechnen.

1. Entweder setzt man eine Integralrechnung an.

   $$I = \int_0^6 \left(\frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 22{,}5x \right) dx$$

   $$I = \left[\frac{1}{40}x^4 - x^3 + 11{,}25x \right]_0^6$$ Das c entfällt, da hier die **Fläche** unter der Kurve berechnet wird.

   $$I = [221{,}4] - [0]$$

   $$I = 221{,}4 FE$$

   1FE = 1 cm
   Höhe = 221,4 + 20 = 241,4 cm

2. Oder man berechnet den Funktionswert von F(6). Dies kann man tun, da man die Betrachtung zum Zeitpunkt 0 beginnt! Das Ergebnis stimmt mit der gesuchten Höhe überein.

   $$F(6) = 241{,}4 cm$$

   Der Baum ist nach 6 Jahren 241,4 cm hoch.