Lösungen U 14

1. Aufgabe

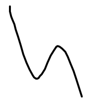
$$f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 1{,}3x - 1{,}5$$

a) $f'(x) = -0{,}3x^2 + 0{,}6x + 1{,}3$

$f''(x) = -0{,}6x + 0{,}6$

$f'''(x) = -0{,}6$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to -\infty$



3. KS **4.** $S_y(0|-1{,}5)$ und für S_x $f(x) = 0$ =>

$0 = -0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 1{,}3x - 1{,}5 \quad |:(-0{,}1)$

$0 = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 - 2x - 15$

p-q liefert $x_2 = 5$ und $x_3 = -3$

$S_{x1}(1|0) \quad S_{x2}(5|0) \quad S_{x3}(-3|0)$

5. Extrempunkte $f'(x) = 0 \;\wedge\; f''(x) \neq 0$

1. Schritt

$0 = -0{,}3x^2 + 0{,}6x + 1{,}3 \quad |:(-0{,}3)$

$0 = x^2 - 2x - \frac{13}{3}$

p-q ergibt $x_1 = 3{,}3$ und $x_2 = -1{,}3$

2. Schritt

$f''(3{,}3) = -1{,}4 < 0$ => Hochpunkt

$f''(-1{,}3) = 1{,}4 > 0$ => Tiefpunkt

3. Schritt

$f(3{,}3) = 2{,}5$ $H(3{,}3|2{,}5)$

$f(-1{,}3) = -2{,}5$ $T(-1{,}3|-2{,}5)$

6. Wendepunkte $f''(x) = 0 \;\wedge\; f'''(x) \neq 0$

1. Schritt

$0 = -0{,}6x + 0{,}6$

$x = 1$

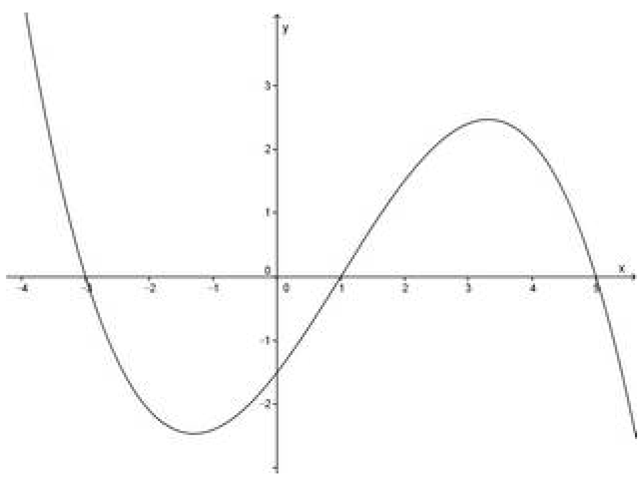
2. Schritt

$f'''(1) = -0{,}6 < 0 \Rightarrow L - R - K$

3. Schritt

$f(1) = 0$ $W_{L-R}(1|0)$

7. Zeichnung



b) Über den Start werden keine genauen Angaben gemacht. Aber für das Ziel erhält man die Angabe der Steigung. Also muss man erst die Stelle des Ziels herausfinden und dann den Start.

$m = -1{,}1$ und $f'(x) = m$ ergibt

$$-1{,}1 = -0{,}3x^2 + 0{,}6x + 1{,}3 \quad | +1{,}1$$
$$0 = -0{,}3x^2 + 0{,}6x + 2{,}4 \quad | : (-0{,}3)$$
$$0 = x^2 - 2x - 8$$

lösen mit p-q-Formel
$x_1 = 4$ und $x_2 = -2$
Da man die Stelle benötigt, an der die Steigung das zweite Mal vorkommt, liegt das Ziel bei x = 4.
800 Meter vor dem Ziel, heißt: 800 m : 100 m/LE = 8 LE
(4-8 = -4) => 8 LE links vor dem Ziel liegt die Stelle x = –4. Dort ist der Start.

c) Die steilste Stelle zwischen Hoch- und Tiefpunkt ist der Wendepunkt.
W(1l0) wurde schon in der Kurvendiskussion berechnet und kann direkt übernommen werden.

$f'(x) = m$

$f'(x) = -0{,}3x^2 + 0{,}6x + 1{,}3$

$f'(1) = 1{,}6$

Die Steigung an der steilsten Stelle (Wendepunkt) beträgt m = 1,6.

d) Für die Höhendifferenz benötigt man die y-Werte des Start- und Zielpunktes.

$f(-4) = 4{,}5$
$f(4) = 2{,}1$

$4{,}5 - 2{,}1 = 2{,}4$ Umrechnung mit 1 LE = 10 m ergibt: 24 m

Das Ziel liegt 24 Meter tiefer als der Start.

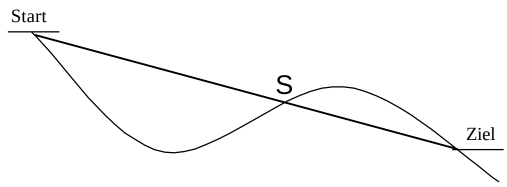
e) Erstellen der Geradengleichung mit der Steigungsformel: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Einsetzen der Punkte (1l3) und (-1l3,6): $m = \frac{3{,}6 - 3}{-1 - 1}$ ergibt eine Steigung von $m = -0{,}3$.

Punkt (1l3) und m einsetzen in $y = m \cdot x + b$ führt zu $3 = -0{,}3 \cdot 1 + b$ mit $b = 3{,}3$.

Also stimmt die Geradengleichung. $g(x) = -0{,}3x + 3{,}3$

f) Da die Gerade Start und Ziel verbindet, und der Abstand zwischen f(x) und g(x) im Bereich Start bis S größer ist als der Abstand im Bereich S bis Ziel, muss man, um einen positiven Wert zu erhalten, für die Extremwertberechnung folgende Hauptbedingung festlegen:



$D = g(x) - f(x)$ (D steht hier für Differenz)

Die Nebenbedingungen sind die beiden Funktionen g(x) und f(x).

$g(x) = -0{,}3x + 3{,}3$

$f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 1{,}3x - 1{,}5$

Der Definitionsbereich ergibt sich aus der Angabe „von Start bis Ziel", also $D = [-4;4]$

Für die Zielfunktion müssen beide Nebenbedingungen in die Hauptbedingung eingesetzt werden.

$D(x) = -0{,}3x + 3{,}3 - (-0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 1{,}3x - 1{,}5)$

$D(x) = -0{,}3x + 3{,}3 + 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 - 1{,}3x + 1{,}5$

$D(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 - 1{,}6x + 4{,}8$ **Zielfunktion**

Zur Berechnung der x-Werte muss die Zielfunktion abgeleitet werden.

$D'(x) = 0{,}3x^2 - 0{,}6x - 1{,}6$
$D''(x) = 0{,}6x - 0{,}6$

$D'(x) = 0 \wedge D''(x) \neq 0$

$$0 = 0{,}3x^2 - 0{,}6x - 1{,}6 \quad | : 0{,}3$$
$$0 = x^2 - 2x - \frac{16}{3}$$

Mit p-q-Formel ergeben sich die Lösungen: $x_1 = 3{,}5$ und $x_2 = -1{,}5$

Da beide im Definitionsbereich liegen, müssen auch beide überprüft werden.

$D''(3{,}5) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow$ Min.

$D''(-1{,}5) = -1{,}5 < 0 \Rightarrow$ Max.

Einsetzen in die Nebenbedingungen:

$g(-1{,}5) = 3{,}8$

$f(x) = -2{,}4$

Durch Einsetzen in die Hauptbedingung erhält man:

$D = 3{,}8 - (-2{,}4) = 6{,}2$

Überprüfen der Ränder (Einsetzen der Werte aus dem Definitionsbereich in die Zielfunktion)

$D(-4) = 0 < 6{,}2$

$D(4) = 0 < 6{,}2$

Da hier nur von den Funktionen gesprochen wird und es keinen Bezug zu dem Abfahrtsrennen gibt, formuliert man den Antwortsatz nur mit: „ Der maximale Abstand beträgt 6,2 LE."

g) Auch hier wird nur von den Funktionen gesprochen, also kann das Endergebnis in FE angegeben werden.
In Aufgabe f) sieht man in der Skizze, dass es zwischen Start und Ziel noch den Schnittpunkt S gibt. Also muss man erst durch Gleichsetzen der beiden Funktionen diesen Schnittpunkt ermitteln.

$f(x) = g(x)$

$-0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 1{,}3x - 1{,}5 = -0{,}3x + 3{,}3 \;|\; +0{,}3x - 3{,}3$

$-0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 1{,}6x - 4{,}8 = 0$ **Funktion zum Integrieren**

Bei der Integralrechnung spielt es keine Rolle, auf welche Seite man umformt. Man hat am Ende der Rechnung immer die Möglichkeit, eine negative Fläche mittels Betragstriche ins Positive zu verwandeln.

$-0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 1{,}6x - 4{,}8 = 0 \;|\; :(-0{,}1)$

$x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ ergibt $x^2 + x - 12$

mit p-q erhält man $x_2 = 3$ und $x_3 = -4$

$$A_1 = \left| \int_{-4}^{3} (-0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 1{,}6x - 4{,}8)\,dx \right|$$

$$A_1 = \left| \left[-\frac{1}{40}x^4 + 0{,}1x^3 + 0{,}8x^2 - 4{,}8x \right]_{-4}^{3} \right|$$

$$A_1 = \left| [-6{,}525] - [19{,}2] \right|$$

$$A_1 = |-25{,}725|$$

$$A_1 = 25{,}7FE$$

$$A_{ges} = A_1 + A_2 = 25{,}7 + 0{,}2 = 25{,}9FE$$

$$A_2 = \int_{3}^{4} (-0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 1{,}6x - 4{,}8)\,dx$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{40}x^4 + 0{,}1x^3 + 0{,}8x^2 - 4{,}8x \right]_{3}^{4}$$

$$A_2 = [-6{,}4] - [-6{,}525]$$

$$A_2 = 0{,}2FE$$

2. Aufgabe

a) $f(x) = g(x)$

$\frac{2x-2}{x+1} = -2x + 2 \;|\; \cdot (x+1)$

$2x - 2 = (-2x + 2)(x + 1)$

$2x - 2 = -2x^2 - 2x + 2x + 2 \;|\; -2x + 2$

$0 = -2x^2 - 2x + 4 \;|\; :(-2)$

$0 = x^2 + x - 2$

mit pq ergibt sich $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$

$g(1) = 0 \qquad S_1(1|0)$
$g(-2) = 6 \qquad S_2(-2|6)$

b) $f(x) = \dfrac{2x-2}{x+1}$

1. Definitionsbereich
2. Schnittpunkte mit den Achsen
3. Ersatzfunktion
4. Poluntersuchung
5. Asymptote
6. Symmetrie
7. Skizze

1 $N(x) = 0$
$\Rightarrow x = -1 \qquad \Rightarrow D = R \setminus \{-1\}$

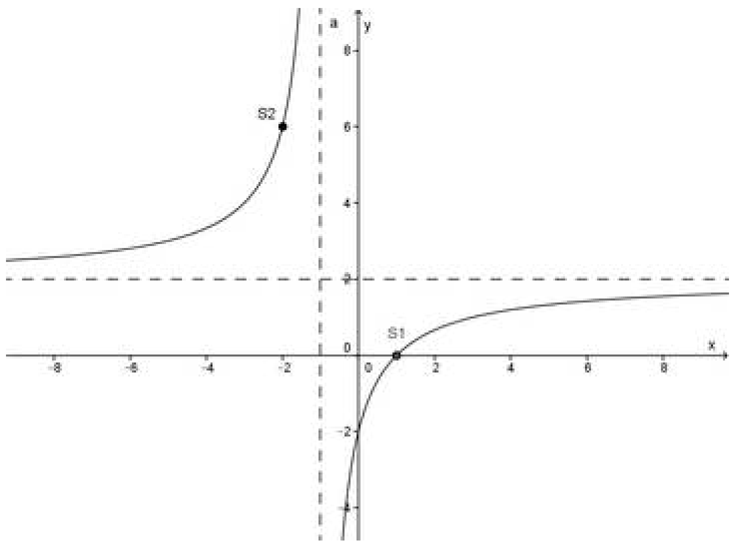
2 $f(x) = 0$
$\Rightarrow x = 1 \qquad \Rightarrow S_x(1|0)$ (da keine Übereinstimmung mit Definitionsbereich)

$f(0) = -2 \qquad \Rightarrow S_y(0|-2)$

3 keine behebbare Lücke (keine Ersatzfunktion, da keine Übereinstimmung mit Def.)

4 x = -1 ist Pol

$$\left.\begin{array}{l} l-\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x-2}{x+1} = +\infty \\[2ex] r-\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x-2}{x+1} = -\infty \end{array}\right\}$$ Pol mit VZW



5 Zg = Ng

$(2x-2):(x+1) = 2 - \dfrac{4}{x+1} \qquad \Rightarrow y_A = 2$
$-(2x+2)$
-4

$x \to -\infty; R(x) > 0 \quad von \quad oben$
$x \to +\infty; R(x) < 0 \quad von \quad unten$

6 KS

3. Aufgabe

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
(0l2)	$f(0) = 2$	I $2 = d$	
x = 0; m = 0	$f'(0) = 0$	II $0 = c$	c einsetzen in IV
x = 1; Wst	$f''(1) = 0$	III $0 = 6a + 2b$	
x = 1; m = -3	$f'(1) = -3$	IV $-3 = 3a + 2b + c$	

III $0 = 6a + 2b$ III $0 = 6a + 2b$ addieren ergibt
IV $-3 = 3a + 2b | \cdot (-1)$ IV $3 = -3a - 2b$ $3 = 3a \quad \Rightarrow a = 1$

a einsetzen in III $0 = 6 \cdot 1 + 2b | -6 \quad \Rightarrow -6 = 2b | : 2 \qquad b = -3$

Alle Werte einsetzen in f(x) ergibt: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 2ax + b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
(-2l3)	$f(-2) = 3$	I $3 = 4a - 2b + c$
x = -2; m = 0	$f'(-2) = 0$	II $0 = -4a + b$
(-1l1)	$f(-1) = 1$	III $1 = a - b + c$

I $3 = 4a - 2b + c$ I $3 = 4a - 2b + c$ addieren ergibt
III $1 = a - b + c \,|\cdot(-1)$ III $-1 = -a + b - c$ IV $2 = 3a - b$

II $0 = -4a + b$ addieren ergibt
IV $2 = 3a - b$ $2 = -a$ $\Rightarrow a = -2$ a einsetzen in II $0 = -4\cdot(-2) + b \,|-8$ $\Rightarrow b = -8$

a und b einsetzen in III $1 = -2 + 8 + c \,|-6$ $\Rightarrow c = -5$

Alle Werte einsetzen in f(x) ergibt: $f(x) = -2x^2 - 8x - 5$