Lösungen U 13

1. Aufgabe

a) $E(x) = K(x) + G(x)$

$E(x) = 5x^3 - 6x^2 + 45x + 17 - 5x^3 + x^2 - 30x - 17$ $\quad E(x) = p(x) : x$

$E(x) = -5x^2 + 15x$ $\quad p(x) = -5x + 15$ $\quad$ Monopolist

b) $E(x) = p(x) \cdot x$

$E(x) = -12x^2 + 36x$

$K(x) = E(x) - G(x)$

$K(x) = -12x^2 + 36x - (-0,5x^3 + 2x^2 - 12x - 25)$

$K(x) = 0,5x^3 - 14x^2 + 48x + 25$

c) K'(x) aufleiten

$K(x) = x^3 - 5x^2 + 16x + 31$ $\quad K_{fix}$ aus Gewinnfunktion entnehmen

$E(x) = K(x) + G(x)$

$E(x) = x^3 - 5x^2 + 16x + 31 - x^3 + 5x^2 - 7x - 31$ $\quad E(x) = p(x) : x$

$E(x) = 9x$ $\quad p(x) = 9$ $\quad$ Anbieter i.v.K.

2. Aufgabe

a) E'(x) aufleiten (Keine Konstante in E(x) enthalten!)

$E(x) = -6x^2 + 42x$

$p(x) = -6x + 42$

$p(x) = 0$

$0 = -6x + 42$

$x = 7$

$D_{ök} = [0;7]$

$SM = 7ME$

$HP = 42GE$

b) $K''(x) = 6x - 18$

$K'''(x) = 6$

$K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$

$0 = 6x - 18$

$x = 3$

$K'''(3) = 6 > 0 \Rightarrow$ Min.

$K'(3) = 3$

$GK_{min}(3|3)$ Bei 3 ME liegt die geringste Kostensteigerung von 3 GE vor.

c) K'(x) aufleiten, Konstante als K_{fix} angeben

$K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + K_{fix}$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -6x^2 + 42x - (x^3 - 9x^2 + 30x + K_{fix})$ $\quad G'(x) = -3x^2 + 6x + 12$

$G(x) = -6x^2 + 42x - x^3 + 9x^2 - 30x - K_{fix}$ $\quad G''(x) = -6x + 6$ $\quad G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G(x) = -x^3 + 3x^2 + 12x - K_{fix}$

$0 = -3x^2 + 6x + 12 \,|\, : (-3)$

$0 = x^2 - 2x - 4$

pq-Formel $\quad x_1 = 3,2$ $\quad [x_2 = -1,2]$

$G''(3,2) = -13,2 < 0 \Rightarrow$ Max.

$p(3,2) = 22,8$ $\quad C(3,2|22,8)$

d) $K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + K_{fix}$ $\quad$ P(2l42) einsetzen

$42 = 32 + K_{fix}$

$K_{fix} = 10$ $\quad K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 10$ $\quad \Rightarrow G(x) = -x^3 + 3x^2 + 12x - 10$

e) Hier werden Gewinnschwelle und Gewinngrenze gesucht.

$G(x) = 0$

$0 = -x^3 + 3x^2 + 12x - 10 \,|\, : (-1)$ $\quad$ Polynomdivision mit $x_1 = 5$ ergibt $0 = x^2 + 2x - 2$

$0 = x^3 - 3x^2 - 12x + 10$

pq-Formel ergibt $x_2 = 0,7$ und $[x_3 = -2,7]$

Die Gewinnschwelle liegt bei 0,7 ME und die Gewinngrenze bei 5 ME.

f) $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$

$k_v(x) = x^2 - 9x + 30$

$k_v'(x) = 2x - 9$ $\quad k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$ $\quad 0 = 2x - 9$ $\quad k_v''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ Min.

$x = 4{,}5$ $\quad k_v(4{,}5) = 9{,}75$

$k_v''(x) = 2$

Das BM (Betriebsminimum) liegt bei 4,5 ME. KPU (kurzfristige Preisuntergrenze) beträgt 9,75 GE.

3. Aufgabe

a) $k(x) = \frac{K(x)}{x}$

$k(x) = x^2 - 7x + 17 + \frac{16}{x}$

$k'(x) = 2x - 7 - \frac{16}{x^2}$ und $k''(x) = 2 + \frac{32}{x^3}$

$k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 7 - \frac{16}{x^2} \Big| \cdot x^2$ $\quad$ Polynomdivision mit $x_1 = 4$ ergibt $0 = x^2 + 0{,}5x + 2$

$0 = 2x^3 - 7x^2 - 16 \big| : 2$

$0 = x^3 - 3{,}5x^2 + 0x - 8$ $\quad$ In der p-q-Formel ergibt sich eine negative Wurzel. Somit existieren keine weiteren Lösungen für x.

$k''(4) = 6 > 0 \Rightarrow$ Min. $\quad k(4) = 9$

Bei 4 ME (Betriebsoptimum BO) kann die LPU von 9 GE gehalten werden.

b) $k_v(x) = x^2 - 7x + 17$

$k_v'(x) = 2x - 7$ und $k_v''(x) = 2$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 7$

$x = 3{,}5$ $\quad k''(3{,}5) = 2 > 0 \Rightarrow$ Min. $\quad k_v(3{,}5) = 4{,}75$

Bei 3,5 ME (Betriebsminimum BM) liegt die KPU mit 4,75 GE.

c) $K(x) = x^3 - 7x^2 + 17x + 16$ $\quad K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$ $\quad K'(2{,}3) = 0{,}7$

$K'(x) = 3x^2 - 14x + 17$ $\quad 0 = 6x - 14$ $\quad GK_{min}(2{,}3 | 0{,}7)$

$K''(x) = 6x - 14$ $\quad x = 2{,}3$

$K'''(x) = 6$ $\quad K'''(2{,}3) = 6$

Bei 2,3 ME liegt die geringste Kostensteigerung von 0,7 GE vor.

4. Aufgabe

a) $G(x) = 0$

$0 = -x^3 + 9{,}5x^2 - 15x - 36 \big| : (-1)$ $\quad$ Polynomdivision mit $x_1 = 6$ ergibt $0 = x^2 - 3{,}5x - 6$

$0 = x^3 - 9{,}5x^2 + 15x + 36$

p-q ergibt $x_2 = 4{,}75$ und $[x_3 = -1{,}25]$

Die Gewinnschwelle liegt bei 4,75 ME und die Gewinngrenze bei 6 ME.

b) $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$ $\quad 0 = -3x^2 + 19x - 15 \big| : (-3)$

$G'(x) = -3x^2 + 19x - 15$ $\quad 0 = x^2 - \frac{19}{3}x + 5$

$G''(x) = -6x + 19$ $\quad$ p-q liefert $x_1 = 5{,}4$ und $x_2 = 0{,}9$

$G''(5{,}4) = -13{,}4 < 0 \Rightarrow$ Max. $\quad G(5{,}4) = 2{,}6$ $\quad$ Das Gewinnmaximum liegt bei 2,6 GE.

$G''(0{,}9) = 13{,}6 > 0 \Rightarrow$ Min.

c) Bei 5,4 ME wird das Gewinnmaximum erreicht. Bei 10 ME ist es also weniger Gewinn; hier in diesem Fall sogar Verlust, da die Gewinngrenze bei 6 ME liegt und danach gibt es nur Verlust.

d) Anbieter i.v.K. = konstanter Preis

K(5)=88,5 GE (gegeben)
G(5)=1,5 GE (berechnet)

Da gilt: $E(x) = K(x) + G(x)$ ergibt sich: $\begin{aligned} E(5) &= 88{,}5 + 1{,}5 \\ E(5) &= 90 \end{aligned}$

Bei 5 ME erzielt man also einen Erlös von 90 GE.

Da gilt: $p(x) = E(x) : x$ ergibt sich: $\begin{aligned} p(5) &= 90 : 5 \\ p(5) &= 18 \end{aligned}$ Der Preis von 18 GE gilt aber bei jeder Stückzahl, da es ein Anbieter i.v.K. ist. => $p(x) = 18$

Der Preis liegt bei 18 GE.

e)
$$\begin{aligned} E(x) &= p(x) \cdot x \\ E(x) &= 18x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} K(x) &= E(x) - G(x) \\ K(x) &= 18x - (-x^3 + 9{,}5x^2 - 15x - 36) \\ K(x) &= 18x + x^3 - 9{,}5x^2 + 15x + 36 \\ K(x) &= x^3 - 9{,}5x^2 + 33x + 36 \end{aligned}$$

f) $k_v(x) = x^2 - 9{,}5x + 33$

$k_v'(x) = 2x - 9{,}5$ und $k_v''(x) = 2$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x - 9{,}5 \\ x &= 4{,}75 \end{aligned}$$

$k''(4{,}75) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $k_v(4{,}75) = 10{,}4$

Bei 4,75 ME (Betriebsminimum BM) liegt die KPU mit 10,4 GE.