Lösungen T 17 / Teil II B

1. Aufgabe

1.1

$A = \frac{1}{2}x \cdot y$ Hauptbedingung (Flächeninhalt Dreieck)

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ Nebenbedingung (liefert Einschränkung für die Größe des Dreiecks)

$A(x) = \frac{1}{2}x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right)$

$A(x) = -0{,}25x^3 - 0{,}25x^2 + 0{,}5x$ Zielfunktion (Flächeninhaltsfunktion des Blumenbeetes)

1.2

$A(x) = -0{,}25x^3 - 0{,}25x^2 + 0{,}5x$

$A'(x) = -0{,}75x^2 - 0{,}5x + 0{,}5$

$A''(x) = -1{,}5x - 0{,}5$

$A'(x_E) = 0$

$0 = -0{,}75x^2 - 0{,}5x + 0{,}5 \,|: (-0{,}75)$

$0 = x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$x_{1/2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}}$

$x_{E1} \approx 0{,}55$

$x_{E2} \approx -1{,}22$

$A'(x_E) = 0 \wedge A''(x_E) \neq 0$

$A''(0{,}55) = -1{,}325 < 0 \Rightarrow H$

$A''(-1{,}22) = 1{,}33 > 0 \Rightarrow T$

$A(0{,}55) \approx 0{,}16$ $\quad H(0{,}55|0{,}16)$

$A(-1{,}22) \approx -0{,}53$ $\quad T(-1{,}22|-0{,}53)$

Da der Definitionsbereich bei 0 beginnt (Hecke = y-Achse), fällt der Tiefpunkt aus der Betrachtung heraus.
Der Hochpunkt gibt die Länge x sowie die maximale Fläche A an.
Um die Breite y zu berechnen, muss man x in die Nebenbedingung einsetzen.

$f(0{,}55) \approx 0{,}57$

Einheiten umrechnen auf Meter (1LE = 10 Meter)
Das dreieckige Blumenbeet ist 5,5 m lang und 5,7 m breit. Es hat eine maximale Fläche von 16 m².

1.3

$A(x) = -0{,}25x^3 - 0{,}25x^2 + 0{,}5x$

$A(x_N) = 0$

$0 = -0{,}25x^3 - 0{,}25x^2 + 0{,}5x \,|: (-0{,}25)$

$0 = x^3 + x^2 - 2x$

$0 = x(x^2 + x - 2)$

$x_{N1} = 0 \qquad 0 = x^2 + x - 2$

$x_{N2/3} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2}$

$x_{N2} = 1$

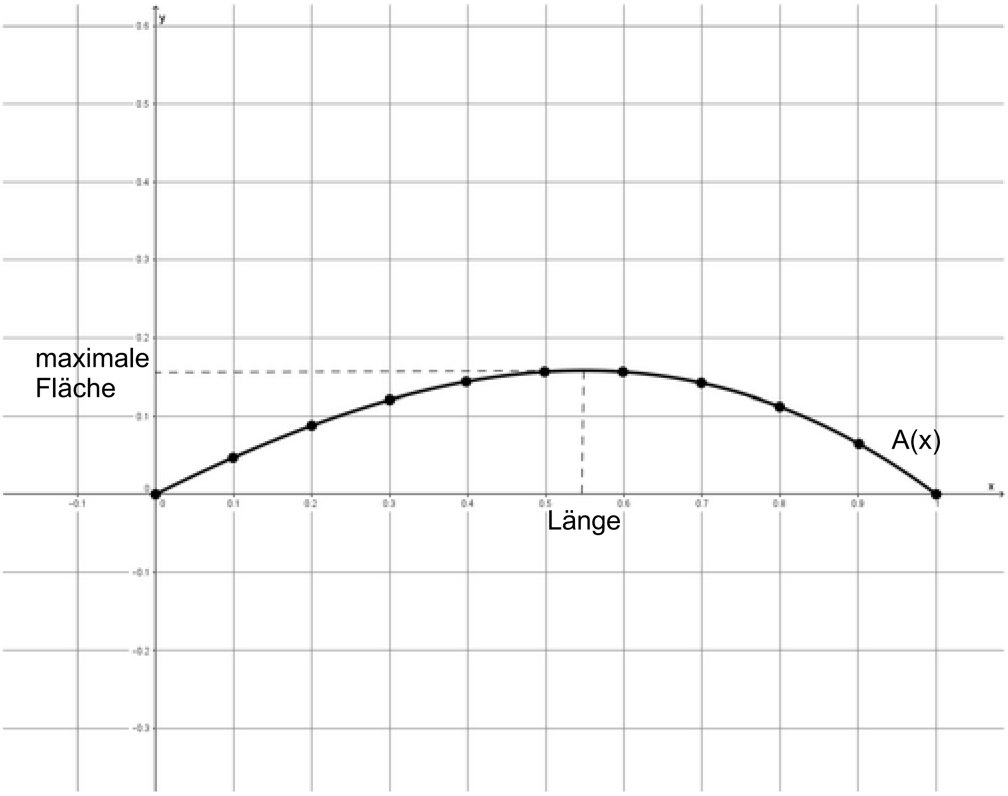
$x_{N3} = -2$

Die Nullstellen der Zielfunktion geben die Längen an, die zu keinem (null) Flächeninhalt führen.

$x_{N1} = 0$ Hier beginnt das Beet. (Keine Länge vorhanden, also auch keine Fläche.)

$x_{N2} = 1$ Hier trifft der Weg auf die Hecke. (Keine Breite vorhanden, also auch keine Fläche.)
$x_{N3} = -2$ Dieser Wert liegt nicht im Definitionsbereich, keine negative Länge möglich.
Die Stellen 0 und 1 sind die Ränder des Definitionsbereichs. Man untersucht hier sozusagen die Randextrema.

1.4



1.5
Flächenberechnung = Integralrechnung

$$A = \int_0^1 (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1)dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x\right]_0^1$$

$$A = \left[\frac{7}{12}\right] - [0]$$

$$A = \frac{7}{12}FE$$

Umrechnung mit 1 FE = 100 m²

$A = 58{,}33m^2$ für den gesamten Bereich zwischen Weg und Hecke

$A_{Rasen} = A_{gesamt} - A_{Beet} = 58{,}33 - 16 = 42{,}33m^2$

Die Rasenfläche beträgt 42,33 m².

1.6

Fläche Blumenbeet in Prozent = $\frac{16}{58{,}33} \cdot 100\% = 27{,}43\%$

Das Blumenbeet hat an der Gesamtfläche einen Anteil von 27,43 %.

2. Aufgabe

2.1

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_y(0\|-1)$	$f(0) = -1$	I	$d = -1$
$H(1\|1)$	$f(1) = 1$	II	$a + b + c + d = 1$
$x = 1; m = 0$	$f'(1) = 0$	III	$3a + 2b + c = 0$
$P(2\|1)$	$f(2) = 1$	IV	$8a + 4b + 2c + d = 1$

d einsetzen und umformen ergibt:

II $\quad a + b + c = 2$

III $\quad 3a + 2b + c = 0$

IV $\quad 8a + 4b + 2c = 2$

TR: $\quad a = 1;\ b = -4;\ c = 5$

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

2.2

$V = \pi \int_{0,5}^{2} (x^3 - 4x^2 + 5x - 1)^2 dx$

$V \approx 1{,}24\pi VE$

1VE = 1 m³

$V \approx 3{,}90m^3$

Die Vase hat ein Volumen von 3,9 m³.

2.3

$A = 2 \cdot \int_{0,5}^{2} (x^3 - 4x^2 + 5x - 1)dx$

Mit dem Integral kann man nur die Fläche zwischen Kurve und x-Achse berechnen, also nur die Fläche oberhalb der x-Achse. Die Querschnittsfläche besteht aber aus der gleichen Fläche oberhalb und unterhalb der x-Achse. Deshalb setzt man das Integral mit dem Faktor 2 an.

$A = 2 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x\right]_{0,5}^{2}$

$A = 2 \cdot \left(\left[\frac{4}{3}\right] - \left[-\frac{5}{192}\right]\right)$

$A = \frac{87}{32} FE$

1 FE = 1m²

$A = 2{,}72m^2$

2.4

$30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3$

$V = 3{,}9m^3 \cdot 0{,}3 = 1{,}17m^3 = 1170 Liter$

Die Vase besteht aus 1170 Litern (Beton oder ähnliches).