# Lösungen T 14

## 1. Aufgabe

Fläche zwischen zwei Funktionen => Schnittstellen berechnen

$f_1(x) = f_2(x)$

$x^3 - 8x^2 + 16x = 0{,}4x^3 - 2{,}6x^2 + 4x$ umformen

$0 = -0{,}6x^3 + 5{,}4x^2 - 12x$ (Funktion zum Integrieren)

$0 = -0{,}6x^3 + 5{,}4x^2 - 12x \,|\, :(-0{,}6)$

$0 = x^3 - 9x^2 + 20x$ ausklammern mit $x_1 = 0$ ergibt

$0 = x^2 - 9x + 20$

p-q ergibt $x_2 = 5$ und $x_3 = 4$

$A_1 = \left|\int_0^4 (-0{,}6x^3 + 5{,}4x^2 - 12x)dx\right|$

$A_1 = \left|\left[-0{,}15x^4 + 1{,}8x^3 - 6x^2\right]_0^4\right|$

$A_1 = \left|[-19{,}2] - [0]\right|$

$A_1 = |-19{,}2|$

$A_1 = 19{,}2FE$

$A_2 = \int_4^5 (-0{,}6x^3 + 5{,}4x^2 - 12x)dx$

$A_2 = \left[-0{,}15x^4 + 1{,}8x^3 - 6x^2\right]_4^5$

$A_2 = [-18{,}75] - [-19{,}2]$

$A_2 = 0{,}45FE$

$A_{ges} = A_1 + A_2 = 19{,}2 + 0{,}45 = 19{,}65FE$

## 2. Aufgabe

a) $A = \int_0^1 (x + 21{,}5)dx$

$A = \left[0{,}5x^2 + 21{,}5x\right]_0^1$

$A = [22] - [0]$

$A = 22FE$

b) $f(x) = 0$

lösen mit p-q ergibt $x_1 = 19$ und $x_2 = 3$

$A = \int_3^{19} (-0{,}5x^2 + 11x - 28{,}5)dx$

$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 5{,}5x^2 - 28{,}5x\right]_3^{19}$

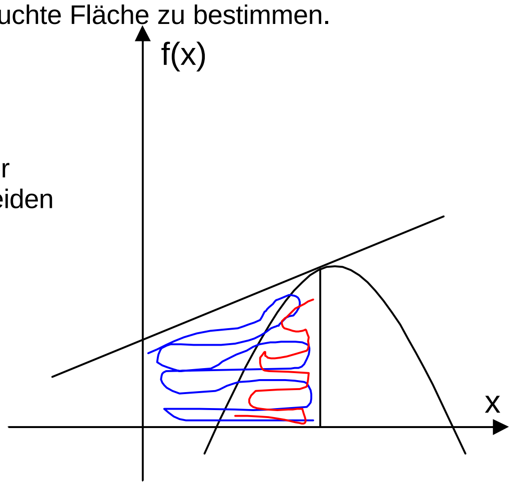
$A = [300{,}8] - [-40{,}5]$

$A = 341{,}3FE$

c) Bei dieser Aufgabe gibt es zwei Möglichkeiten die gesuchte Fläche zu bestimmen.

Variante 1

Man berechnet die Fläche, die von der Tangente t(x) mit der x-Achse begrenzt wird von 0 bis Schnittpunkt der beiden Funktionen (blau). Dann ermittelt man den Flächeninhalt von 3 (Nullstelle) bis Schnittpunkt mit der Funktion f(x) (rot). Nun bildet man die Differenz aus beiden Flächen, da man bei der ersten Fläche, den Bereich unter der Parabel zu viel mitberechnet hat.




$f(x) = t(x)$

$-0{,}5x^2 + 11x - 28{,}5 = x + 21{,}5$ umformen

$0 = 0{,}5x^2 - 10x + 50 \,|\, : 0{,}5$ und dann p-q-Formel ergibt

$x_{1/2} = 10$ (doppelter Schnittpunkt, da Tangente)

$$A_1 = \int_0^{10} (x + 21{,}5)dx \qquad A_2 = \int_3^{10} (-0{,}5x^2 + 11x - 28{,}5)dx$$

$$A_1 = \left[0{,}5x^2 + 21{,}5x\right]_0^{10} \qquad A_2 = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 5{,}5x^2 - 28{,}5x\right]_3^{10}$$

$$A_1 = [265] - [0] \qquad A_2 = \left[\frac{295}{3}\right] - [-40{,}5]$$

$$A_1 = 265FE \qquad A_2 = 138{,}8FE$$

$$A = A_1 - A_2 = 265 - 138{,}8 = 126{,}2FE$$

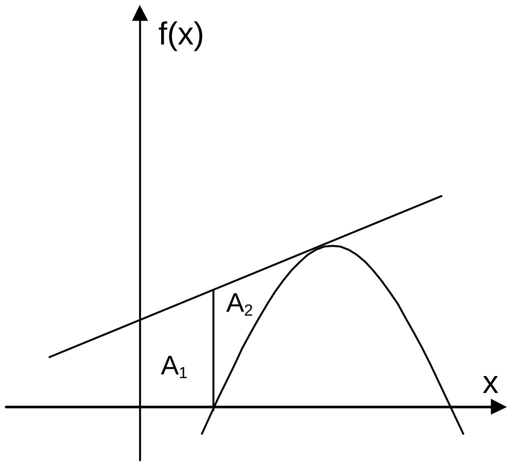
<u>Variante 2</u>
Hier wird die Gesamtfläche als Summe von Teilflächen bestimmt.
Die erste Teilfläche ist nur von x-Achse und t(x) begrenzt.

$$A_1 = \int_0^3 (x + 21{,}5)dx$$

$$A_1 = \left[0{,}5x^2 + 21{,}5x\right]_0^3$$

$$A_1 = [69] - [0]$$

$$A_1 = 69FE$$




Die zweite Teilfläche wird von beiden Funktionen begrenzt. => Schnittpunkte

$$f(x) = t(x)$$

$$-0{,}5x^2 + 11x - 28{,}5 = x + 21{,}5$$

$-0{,}5x^2 + 10x - 50 = 0$ aufzuleitende Funktion

lösen mit p-q ergibt $x_{1/2} = 10$

$$A_2 = \left|\int_3^{10} (-0{,}5x^2 + 10x - 50)dx\right|$$

$$A_2 = \left|\left[-\frac{1}{6}x^3 + 5x^2 - 50x\right]_3^{10}\right|$$

$$A_2 = \left|[-166{,}7] - [-109{,}5]\right|$$

$$A_2 = |-57{,}2|$$

$$A_2 = 57{,}2FE$$

$$A = A_1 + A_2 = 69 + 57{,}2 = 126{,}2FE$$

Welchen Weg man wählt, muss jeder selbst entscheiden. Der Rechenaufwand ist gleich.

## <u>3. Aufgabe</u>

a) Fläche von f(x) mit x-Achse => Nullstellen

$$f(x) = 0$$

$$0 = -x^3 + 2x^2 + 13x + 10 \,|\, : (-1)$$

$0 = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ Polynomdivision mit $x_1 = -1$ ergibt

$0 = x^2 - 3x - 10$ p-q-Formel liefert $x_2 = 5$ und $x_3 = -2$

$$A_1 = \left| \int_{-2}^{-1} (-x^3 + 2x^2 + 13x + 10) dx \right| \qquad A_2 = \int_{-1}^{5} (-x^3 + 2x^2 + 13x + 10) dx$$

$$A_1 = \left| \left[ -0{,}25x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 6{,}5x^2 + 10x \right]_{-2}^{-1} \right| \qquad A_2 = \left[ -0{,}25x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 6{,}5x^2 + 10x \right]_{-1}^{5}$$

$$A_1 = \left| \left[ -\frac{53}{12} \right] - \left[ -\frac{10}{3} \right] \right| \qquad A_2 = [139{,}6] - [-4{,}4]$$

$$A_1 = \left| -\frac{13}{12} \right| \qquad A_2 = 144FE$$

$$A_1 = 1{,}1FE$$

$$A = A_1 + A_2 = 1{,}1 + 144 = 145{,}1FE$$

b) Hier macht man am besten eine Differenzrechnung. Man berechnet zuerst die Fläche von f(x) mit der x-Achse im ersten Quadranten, dann die Fläche von g(x) mit der x-Achse, und als Differenz erhält man die gesuchte, schraffierte Fläche.
Für die Berechnung der Fläche unter g(x) benötigt man die Nullstelle als Grenze.

$$g(x) = 0 \quad \Rightarrow x = 2$$

$$A_1 = \int_{0}^{5} (-x^3 + 2x^2 + 13x + 10) dx \qquad A_2 = \int_{0}^{2} (-2x + 4) dx$$

$$A_1 = \left[ -0{,}25x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 6{,}5x^2 + 10x \right]_{0}^{5} \qquad A_2 = \left[ -x^2 + 4x \right]_{0}^{2}$$

$$A_1 = [139{,}6] - [0] \qquad A_2 = [4] - [0]$$

$$A_1 = 139{,}6FE \qquad A_2 = 4FE$$

$$A = A_1 - A_2 = 139{,}6 - 4 = 135{,}6FE$$

## 4. Aufgabe

Auch hier kommt man am besten durch eine Differenzrechnung zum Ergebnis. Erst die Gesamtfläche zwischen beiden Funktionen, dann die Fläche von $f_2(x)$ unterhalb der x-Achse und zuletzt die Differenz berechnen.

$\mathrm{f}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{f}_2(\mathrm{x})$ => $0{,}5\mathrm{x}^3 - 4\mathrm{x}^2 + 8\mathrm{x} = 0{,}1\mathrm{x}^3 - 0{,}4\mathrm{x}$ umformen

$0{,}4\mathrm{x}^3 - 4\mathrm{x}^2 + 8{,}4\mathrm{x} = 0$ Funktion zum Aufleiten

Die Schnittpunkte und Nullstellen kann man aus der Zeichnung entnehmen.

$$A_1 = \int_{0}^{3} (0{,}4x^3 - 4x^2 + 8{,}4x) dx \qquad A_2 = \left| \int_{0}^{2} (0{,}1x^3 - 0{,}4x) dx \right|$$

$$A_1 = \left[ 0{,}1x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4{,}2x^2 \right]_{0}^{3} \qquad A_2 = \left| \left[ \frac{1}{40}x^4 - 0{,}2x^2 \right]_{0}^{2} \right|$$

$$A_1 = [9{,}9] - [0] \qquad A_2 = \left| \left[ -\frac{2}{5} \right] - [0] \right|$$

$$A_1 = 9{,}9FE \qquad A_2 = \left| -\frac{2}{5} \right|$$

$$A_2 = 0{,}4FE$$

$$A = A_1 - A_2 = 9{,}9 - 0{,}4 = 9{,}5FE$$