Lösungen S 17 / Teil II A

1. Aufgabe

1.1

„Beweisen / Zeigen Sie, dass …eine Nullstelle hat“ bedeutet: einsetzen von x in f(x)

$f(-2)=0$ Stimmt. $x_1=-2$ ist Nullstelle von f(x).

Da hier aber noch die weiteren Nullstellen **berechnet**! werden müssen, führt man diesen Beweis automatisch durch, wenn man Polynomdivision oder Horner-Schema anwendet.

$f(x_N)=0$

$0=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-3x+1 \quad \Big| : \frac{1}{2}$

$0=x^3-1{,}5x^2-6x+2 \qquad x_{N1}=-2$

Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(x^3-1{,}5x^2-6x+2):(x+2)=x^2-3{,}5x+1 \\
\underline{-(x^3+2x^2)} \\
\quad -3{,}5x^2-6x \\
\quad \underline{-(-3{,}5x^2-7x)} \\
\qquad x+2 \\
\qquad \underline{-(x+2)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$x_{N2/3}=\frac{7}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2-1}$

$x_{N2}\approx 3{,}19$

$x_{N3}\approx 0{,}31$

Horner-Schema

	x^3	x^2	x^1	x^0	
	1	$-1{,}5$	-6	2	
$x_{N1}=-2$	0	1	$-3{,}5$	1	0

$x^2-3{,}5x+1=0$

$S_{x1}(-2|0) \quad S_{x2}(3{,}19|0) \quad S_{x3}(0{,}31|0)$

1.2

„Tangente parallel zur x-Achse“ => Tangente mit Steigung 0 => Hoch- oder Tiefpunkte

$f'(x)=1{,}5x^2-1{,}5x-3$

$f''(x)=3x-1{,}5$

$f'(x_E)=0$

$0=1{,}5x^2-1{,}5x-3 \;\big|:1{,}5$

$0=x^2-x-2$

$x_{E1/2}=0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+2}$

$x_{E1}=2$

$x_{E2}=-1$

$f'(x_E)=0 \wedge f''(x_E)\neq 0$

$f''(2)=4{,}5>0\Rightarrow T \qquad f(2)=-4 \qquad T(2|-4)$

$f''(-1)=-4{,}5<0\Rightarrow H \qquad f(-1)=2{,}75 \qquad H(-1|2{,}75)$

1.3

$f''(x)=3x-1{,}5$

$f'''(x)=3$

$f''(x_W)=0 \qquad f''(x_W)=0\wedge f'''(x_W)\neq 0$

$0=3x-1{,}5 \qquad f'''(0{,}5)=3>0\Rightarrow R-L-K$

$x_W=0{,}5 \qquad f(0{,}5)=-0{,}625 \qquad W_{R-L}(0{,}5|-0{,}625)$ *für Zeichnung*

Steigungen berechnet man in der ersten Ableitung.

$$f'(0{,}5) = -\frac{27}{8}$$

$$m_W = -\frac{27}{8}$$ Steigung im Wendepunkt

Der Wendepunkt liegt zwischen einem Hochpunkt (Rechtskrümmung) und einem Tiefpunkt (Linkskrümmung). Folgt man dem Verlauf des Graphen von Hoch- nach Tiefpunkt, so muss in diesem Bereich eine negative Steigung vorliegen.

1.4
Rekonstruktionsaufgabe
Parabel p = quadratische Funktion
Nullstellen der ersten Ableitung => x-Werte von Hoch- und Tiefpunkt
Parabel schneidet den Graphen von f auf der y-Achse => S_y von f(x) auch S_y von p(x)

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_{x1}(2\|0)$	$p(2) = 0$	I	$4a + 2b + c = 0$
$S_{x2}(-1\|0)$	$p(-1) = 0$	II	$a - b + c = 0$
$S_y(0\|1)$	$p(0) = 1$	III	$c = 1$

TR: $a = -0{,}5$; $b = 0{,}5$

$$p(x) = -0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1$$

1.5

$$p(x) = f(x)$$

$$-0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3x + 1$$ umformen

$$0 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3{,}5x$$

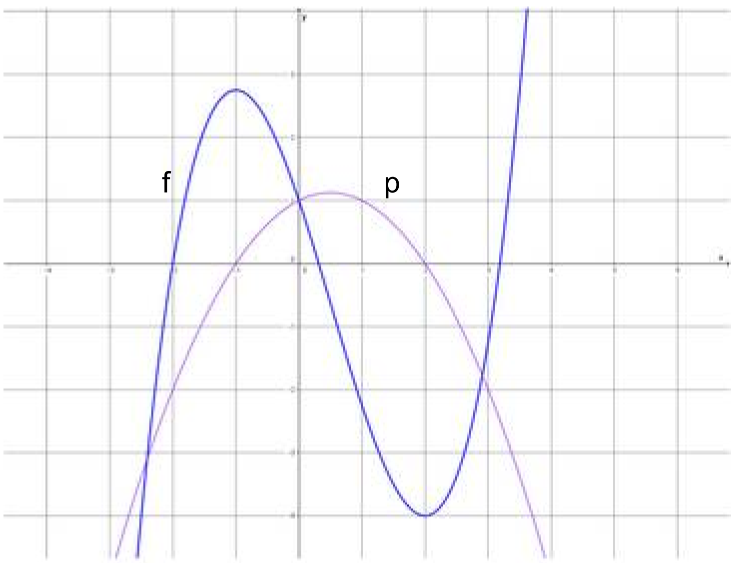
TR:	$x_1 \approx 2{,}91$	$p(2{,}91) \approx -1{,}78$	$S_1(2{,}91\|-1{,}78)$
	$x_2 \approx -2{,}41$	$p(-2{,}41) \approx -3{,}11$	$S_2(-2{,}41\|-3{,}11)$
	$x_3 = 0$	$p(0) = 1$	$S_3(0\|1)$

(y-Werte in f(x) berechnet, weichen etwas ab: -1,76 und -3,12)

1.6
Um p(x) zeichnen zu können, benötigt man den Scheitel (Hochpunkt) der Parabel.

$$x_{Scheitel} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2-1}{2} = 0{,}5$$

$p(0{,}5) = 1{,}125$ $H(0{,}5|1{,}125)$



2. Aufgabe

2.1

$$f(x)=\frac{1}{8}(x-4)^2(x+2)$$
$$f(x)=\frac{1}{8}(x^2-8x+16)(x+2)$$
$$f(x)=\frac{1}{8}(x^3+2x^2-8x^2-16x+16x+32)$$
$$f(x)=\frac{1}{8}(x^3-6x^2+32)$$
$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+4$$

2.2

$$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}x$$
$$f''(x)=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$$
$$f'''(x)=\frac{3}{4}$$

$f''(x_W)=0$ $\qquad$ $f''(x_W)=0 \wedge f'''(x_W)\neq 0$

$0=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$ $\qquad$ $f'''(2)=\frac{3}{4}>0 \Rightarrow R-L-K$ $\qquad$ $f(2)=2$ $\quad$ $W_{R-L}(2|2)$

$x_W=2$

$t(x)=m\cdot x+b$ $\qquad$ $f'(2)=-\frac{3}{2}$ $\quad$ m!

$2=-\frac{3}{2}\cdot 2+b$

$b=5$ $\qquad$ $t(x_W)=-\frac{3}{2}x+5$

$n(x)=m\cdot x+b$ $\qquad$ $m_1\cdot m_2=-1$ $\quad \Rightarrow m_2=\frac{2}{3}$

$2=\frac{2}{3}\cdot 2+b$

$b=\frac{2}{3}$ $\qquad$ $n(x_W)=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$

2.3

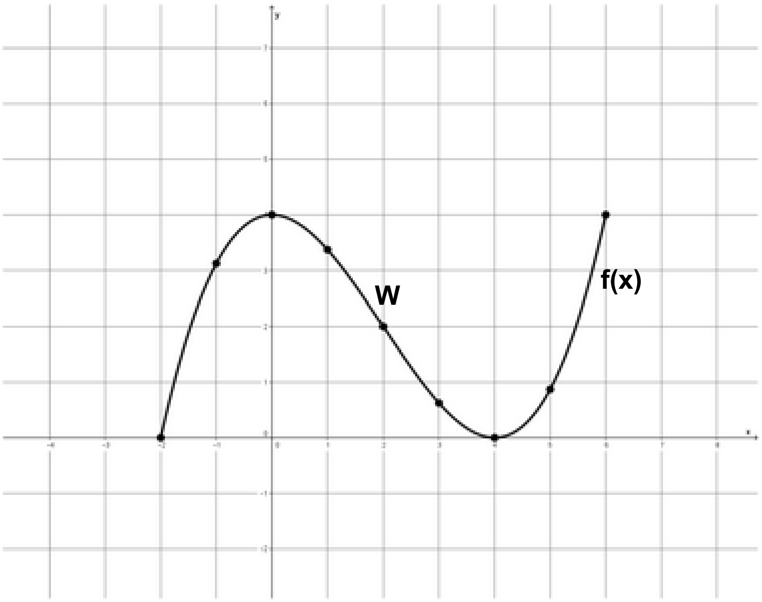
$$n(x)=f(x)$$
$$\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+4 \,\Big|-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$
$$0=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$$

TR: $x_1\approx -2{,}16$ $\qquad$ $n(-2{,}16)\approx -0{,}77$ $\qquad$ $S_1(-2{,}16|-0{,}77)$

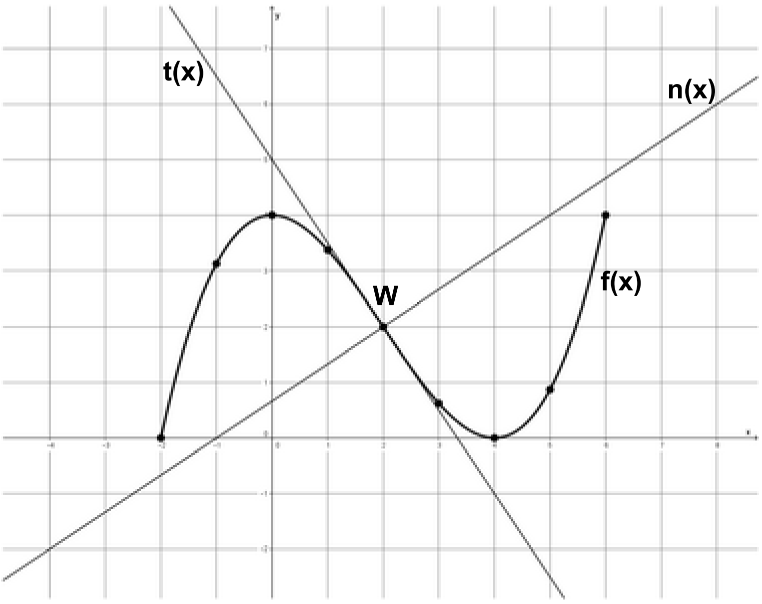
$x_2\approx 6{,}16$ $\qquad$ $n(6{,}16)\approx 4{,}77$ $\qquad$ $S_2(6{,}16|4{,}77)$

$x_3=2$ $\qquad$ $n(2)=2$ $\qquad$ $W_{R-L}(2|2)$

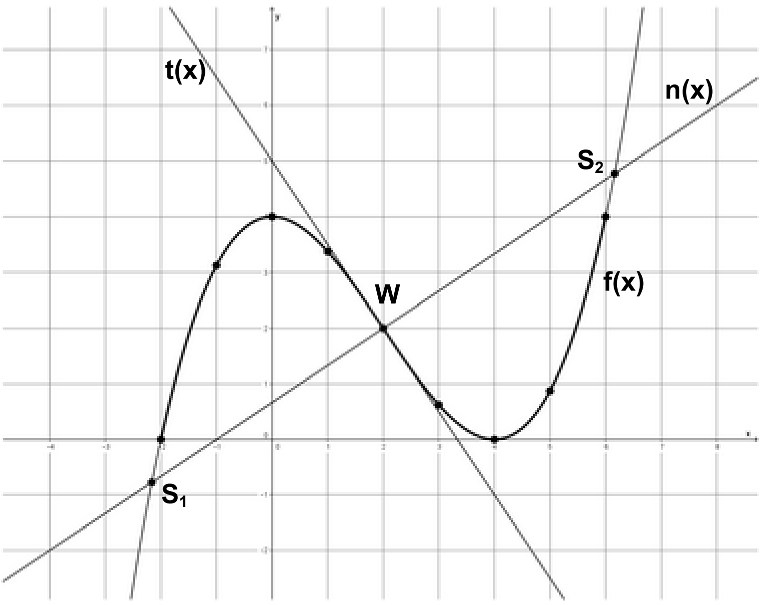
2.4



2.5



2.6



2.7
Die Nullstellen sind bei dieser Funktion ganze Zahlen. Deshalb kann man sie aus der Zeichnung ablesen. Bei ungenauen Werten muss man die Nullstellen im TR ermitteln.

$$A = \int_0^4 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4 \right) dx$$

$$A = \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 4x \right]_0^4$$

$$A = [8] - [0]$$

$$A = 8FE$$

2.8

$$A_1 = \int_0^2 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \right) dx$$

$$A_1 = \frac{23}{6}FE$$

$$A_2 = \left| \int_2^{6{,}16} \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \right) dx \right|$$

$$A_2 = |-9{,}39|$$

$$A_2 = 9{,}39FE$$

$$A_{gesamt} = \frac{23}{6} + 9{,}39 = 13{,}22FE$$