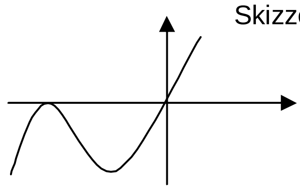
Lösungen R BW

1. Aufgabe

Fläche mit der x-Achse => Nullstellen berechnen von $f(x) = 0{,}5x^3 + 2x^2 + 2x$

$f(x) = 0$

Skizze



$0 = 0{,}5x^3 + 2x^2 + 2x \,|\, : 0{,}5$

$0 = x^3 + 4x^2 + 4x$

x ausklammern mit $x_1 = 0$ ergibt $0 = x^2 + 4x + 4$

p-q ergibt $x_{2/3} = -2$

$$A = \int_{-2}^{0} (0{,}5x^3 + 2x^2 + 2x)dx$$

$$A = \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x^2\right]_{-2}^{0}$$

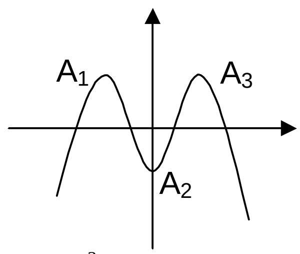
$$A = [0] - \left[\frac{2}{3}\right] = 0{,}7FE$$

2. Aufgabe

Fläche mit der x-Achse => Nullstellen berechnen von $f(x) = -x^4 + 10x^2 - 9$

$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0$

Skizze



$0 = -x^4 + 10x^2 - 9 \,|\, : (-1)$

$0 = x^4 - 10x^2 + 9$ Substitution mit $x^2 = z$

p-q ergibt $z_1 = 9$ und $z_2 = 1$

Resubstitution mit $z = x^2$ und Wurzel ziehen ergibt

$x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = -1$

$$A_1 = \int_{-3}^{-1} (-x^4 + 10x^2 - 9)dx \qquad A_2 = \left|\int_{-1}^{1} (-x^4 + 10x^3 - 9)dx\right| \qquad A_3 = \int_{1}^{3} (-x^4 + 10x^2 - 9)dx$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{10}{3}x^3 - 9x\right]_{-3}^{-1} \qquad A_2 = \left|\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{10}{3}x^3 - 9x\right]_{-1}^{1}\right| \qquad A_3 = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{10}{3}x^3 - 9x\right]_{1}^{3}$$

$$A_1 = \left[5\frac{13}{15}\right] - \left[-14\frac{2}{5}\right] \qquad A_2 = \left|\left[-5\frac{13}{15}\right] - \left[5\frac{13}{15}\right]\right| \qquad A_3 = \left[14\frac{2}{5}\right] - \left[-5\frac{13}{15}\right]$$

$$A_1 = 20\frac{4}{15}FE \qquad A_2 = \left|-11\frac{11}{15}\right| = 11\frac{11}{15}FE \qquad A_3 = 20\frac{4}{15}FE$$

$$A_{ges} = A_1 + A_2 + A_3 = 20\frac{4}{15} + 11\frac{11}{15} + 20\frac{4}{15} = 52\frac{4}{15}FE \approx 52{,}3FE$$

Merke:
Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, sind die beiden Flächen A_1 und A_3 gleich groß.
Man muss nur eine der beiden Flächen berechnen und kann dann ihren Wert verdoppeln.
Günstigerweise berechnet man die Fläche mit den positiven Grenzen, um Fehler beim Einsetzen von

Minuswerten zu vermeiden (hier in der Rechnung A_3). Man schreibt dann am Ende:

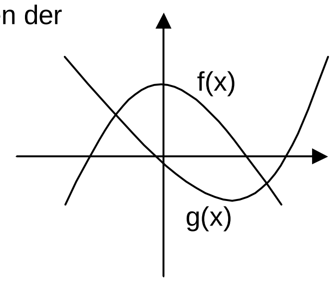
$$A_1 = A_3$$

$$A_{ges} = 2 \cdot A_3 + A_2 = 2 \cdot 20\frac{4}{15} + 11\frac{11}{15} = 52{,}3FE$$

3. Aufgabe

a)

Bei der Fläche zwischen zwei Funktionen benötigt man die Schnittpunkte der beiden Funktionen. Diese sind dann die Grenzen zum Integrieren. Dabei spielen Nullstellen der einzelnen Funktionen keine Rolle. Die Funktion, die aufgeleitet wird, ist die Differenz der beiden Funktionen f und g.



$$f(x) = g(x)$$

$$-0{,}5x^2 + 2 = x^2 - 1{,}5x - 1 \quad | + 0{,}5x^2 - 2$$

$$0 = 1{,}5x^2 - 1{,}5x - 3 \quad | : 1{,}5$$

$$0 = x^2 - x - 2$$

p-q-Formel ergibt $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$

$$A = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{2} (-0{,}5x^2 + 2 - (x^2 - 1{,}5x - 1))dx = \int_{-1}^{2} (-1{,}5x^2 + 1{,}5x + 3))dx$$

$$A = \left[-0{,}5x^3 + 0{,}75x^2 + 3x\right]_{-1}^{2}$$

$$A = [5] - [-1{,}75] = 6{,}75FE$$

b)

Der Abstand der beiden Funktionen ist die Differenz der Funktionswerte, also f(x)-g(x), wobei es hier im Gegensatz zur Integralrechnung eine wichtige Rolle spielt, ob f(x) über g(x) liegt oder umgekehrt. Setzt man die Differenz falsch herum an, kann man in der Integralrechnung Betragstriche setzen. Hier erhält man in diesem Fall dann ein Minimum und einen negativen Wert als Abstand, der sich nicht!!! durch Betragstriche positivieren lässt.

$$D(x) = f(x) - g(x)$$

$$D(x) = -1{,}5x^2 + 1{,}5x + 3$$

Der Definitionsbereich für diese Rechnung wird durch die Schnittpunkte vorgegeben. $D = [-1;2]$

Zur Berechnung des maximalen Abstands muss man die Extremwerte bestimmen.

$$D'(x) = -3x + 1{,}5$$

$$D''(x) = -3$$

mit $D'(x) = 0$ und $D''(x) \neq 0$

$$0 = -3x + 1{,}5$$

$$x = 0{,}5$$

$$D''(0{,}5) = -3 < 0 \Rightarrow Max.$$

$$D(0{,}5) = 3{,}375LE$$

Die Überprüfung der Randextrema soll zeigen, dass sich an den Rändern des Definitionsbereichs keine größeren Abstande befinden und somit der Definitionsbereich (Schnittpunkte) richtig gewählt ist.

$$D(-1) = 0 < 3{,}375$$

$$D(2) = 0 < 3{,}375$$

Der größte Abstand der beiden Funktionen in dem vorgegeben Bereich ist 3,375 LE.

4. Aufgabe

a) $f(x) = g(x)$

$$2x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = x^3 + 10x^2 - 8x + 1 \quad | - x^3 - 10x^2 + 8x - 1$$

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

x ausklammern mit $x_1 = 0$ ergibt $x^2 - 4x + 3 = 0$

p-q-Formel ergibt $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$

$$A_1 = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (2x^3 + 6x^2 - 5x + 1 - (x^3 + 10x^2 - 8x + 1))dx = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx =$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 1{,}5x^2\right]_0^1$$

$$A_1 = \left[\frac{5}{12}\right] - [0] = \frac{5}{12}\text{FE}$$

$$A_1 = \left|\int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx\right|$$

$$A_2 = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 1{,}5x^2\right]_1^3\right|$$

$$A_2 = \left|\left[-\frac{9}{4}\right] - \left[\frac{5}{12}\right]\right| = \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3}\text{FE}$$

$$A_{ges} = A_1 + A_2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\text{FE} \approx 3{,}1\text{FE}$$

b) $D(x) = f(x) - g(x)$

$D(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

$D = [0;3]$ ist hier vorgegeben

$D'(x) = 3x^2 - 8x + 3$ mit $D'(x) = 0$ und $D''(x) \neq 0$

$D''(x) = 6x - 8$

$0 = 3x^2 - 8x + 3 \,|\, : 3$

$0 = x^2 - \frac{8}{3}x + 1$

p-q-Formel liefert $x_1 = 2{,}2$ und $x_2 = 0{,}5$

$D''(2{,}2) = 5{,}2 > 0 \Rightarrow$ Min.

$D''(0{,}5) = -5 < 0 \Rightarrow$ Max.

$D(0{,}5) = 0{,}625$LE

$D(0) = 0 < 0{,}625$

$D(3) = 0 < 0{,}625$

Der größte Abstand der beiden Funktionen in dem vorgegeben Bereich ist 0,625 LE.

5. Aufgabe

a) Für die Fläche der Weide benötigt man die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

$f(x) = g(x)$

$-0{,}5x^3 + x^2 + 3{,}5x + 4 = 0{,}25x^2 - x + 2 \,|\, -0{,}25x^2 + x - 2$

$-0{,}5x^3 + 0{,}75x^2 + 4{,}5x + 2 = 0 \,|\, : (-0{,}5)$

$x^3 - 1{,}5x^2 - 9x - 4 = 0$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ ergibt $0 = x^2 + 2{,}5x + 1$
p-q ergibt $x_2 = -0{,}5$ und $x_3 = -2$
Die Fläche der Weide geht von $[0;4]$, da die Weide erst bei der y-Achse beginnt.

$$A = \int_0^4 (f(x) - g(x))dx = \int_0^4 (-0{,}5x^3 + 0{,}75x^2 + 4{,}5x + 2)dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + 2x \right]_0^4$$

$$A = [28] - [0] = 28FE$$

Da 1 LE 10 Metern entspricht, ist 1 FE = 100 m².
Die Weide besitzt eine Fläche von 2800 m².

b) $D(x) = f(x) - g(x)$

$$D(x) = -0{,}5x^3 + 0{,}75x^2 + 4{,}5x + 2$$

$D = [0;4]$ (Schnittpunkte der Funktionen)

$$D'(x) = -1{,}5x^2 + 1{,}5x + 4{,}5$$

$$D''(x) = -3x + 1{,}5$$

mit $D'(x) = 0$ und $D''(x) \neq 0$

$$0 = -1{,}5x^2 + 1{,}5x + 4{,}5 \,|: (-1{,}5)$$

$$0 = x^2 - x - 3$$

p-q-Formel liefert $x_1 = 2{,}3$ und $x_2 = -1{,}3 \notin D$

$$D''(2{,}3) = -5{,}4 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

$$D(2{,}3) = 10{,}2LE$$

$$D(0) = 2 < 10{,}2$$

$$D(4) = 0 < 10{,}2$$

Der größte Abstand von Bach und Feldweg auf der Weide sind102 Meter.