Lösungen Q 13

1. Aufgabe

a) $p(x) = -7x + 49$ Der Höchstpreis beträgt 49 GE.

$p(x) = 0$

$0 = -7x + 49$

$x = 7$ $D_{ök} = [0;7]$

b) $E(x) = -7x^2 + 49x$ $E'(x) = 0 \wedge E''(x) \neq 0$

Erlösmaximum $0 = -14x + 49$

$E'(x) = -14x + 49$ $x = 3{,}5$

$E''(x) = -14$ $E''(3{,}5) = -14 < 0 \Rightarrow$ Max. $E(3{,}5) = 85{,}75$

Das Erlösmaximum liegt bei 85,75 GE und wird mit 3,5 ME erreicht.

c) $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -7x^2 + 49x - (x^3 - 6x^2 + 15x + 32)$

$G(x) = -x^3 - x^2 + 34x - 32$

$G(x) = 0$

$0 = -x^3 - x^2 + 34x - 32 \,|: (-1)$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 + 2x - 32$

$0 = x^3 + x^2 - 34x + 32$

p-q ergibt $x_2 = 4{,}7$ und $[x_3 = -6{,}7]$

Die Gewinnschwelle liegt bei 1 ME und die Gewinngrenze bei 4,7 ME.

d) Die Gewinnzone ist 4,7 – 1 = 3,7 ME groß.

e) erlösmaximale Menge = x-Wert vom Erlösmaximum (Aufgabe 1b)

$x = 3{,}5$

$G(3{,}5) = 31{,}9$

Ja, der Gewinn liegt bei 31,9 GE.

f) $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$ $0 = -3x^2 - 2x + 34 \,|: (-3)$

$G'(x) = -3x^2 - 2x + 34$ $0 = x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{34}{3}$

$G''(x) = -6x - 2$ p-q liefert $x_1 = 3$ und $[x_2 = -3{,}7]$

$G''(3) = -20 < 0 \Rightarrow$ Max. $x_{G\,max} = 3$

$C\left(x_{G\,max} \,|\, p(x_{G\,max})\right)$ gewinnmaximale Menge und zugehöriger Preis

$p(3) = 28$

$C(3|28)$ Bei 3 ME und einem Preis von 28 GE je Mengeneinheit macht man maximalen Gewinn.

g) $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$ $K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$ $K'(2) = 3$

$K'(x) = 3x^2 - 12x + 15$ $0 = 6x - 12$ $GK_{min}(3|3)$

$K''(x) = 6x - 12$ $x = 2$

$K'''(x) = 6$ $K'''(2) = 6$

Bei 3 ME liegt die geringste Kostensteigerung von 3 GE vor.

h) BM und KPU berechnen

$k_v(x) = x^2 - 6x + 15$

$k_v'(x) = 2x - 6$ und $k_v''(x) = 2$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 6$

$x = 3$ $\quad k''(3) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.} \quad k_v(3) = 6$

Den kleinsten Preis von 6 GE kann der Betrieb bei einer Produktion von 3 ME anbieten.

i) BO und LPU berechnen

$k(x) = x^2 - 6x + 15 + \frac{32}{x}$

$k'(x) = 2x - 6 - \frac{32}{x^2}$ und $k''(x) = 2 + \frac{64}{x^3}$

$k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 6 - \frac{32}{x^2} \,\Big|\cdot x^2$ $\quad$ Polynomdivision mit $x_1 = 4$ ergibt $0 = x^2 + x + 4$

$0 = 2x^3 - 6x^2 - 32 \,|: 2$

$0 = x^3 - 3x^2 + 0x - 16$ $\quad$ In der p-q-Formel ergibt sich eine negative Wurzel. Somit existieren keine weiteren Lösungen für x.

$k''(4) = 3 > 0 \Rightarrow \text{Min.} \quad k(4) = 15$

Bei 4 ME (Betriebsoptimum BO) kann die LPU von 15 GE gehalten werden.

2. Aufgabe

1. HB $u = 2x + 2y$

2. NB $2500 = x \cdot y$ Hier ist die Fläche die Nebenbedingung

3. $y = \frac{2500}{x}$ mit $y = 0$

$0 = \frac{2500}{x} \,\Big|\cdot x$ $\quad$ Hier kann man das Ende des Definitionsbereichs nicht festlegen.

$0 \neq 2500$

Da aber Seitenlängen gesucht sind, beginnt er trotzdem bei null.

4. $u(x) = 2x + 2(\frac{2500}{x})$

$u(x) = 2x + \frac{5000}{x}$ **Zielfunktion**

Die Ableitung und die Berechnung erfolgt genauso wie mit der Stückkostenfunktion bei den ökonomischen Aufgaben.

5. $u'(x) = 2 - \frac{5000}{x^2}$ $\quad u'(x) = 0 \wedge u''(x) \neq 0$

$u''(x) = +\frac{10000}{x^3}$

$0 = 2 - \frac{5000}{x^2} \,\Big|\cdot x^2$

$0 = 2x^2 - 5000 \,| + 5000$ $\quad x_1 = 50$ und $[x_2 = -50]$

$5000 = 2x^2 \,|: 2$

$2500 = x^2 \,\Big|\sqrt{}$

$u''(50) = 0{,}08 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

6. $y = \frac{2500}{50}$, $y = 50$

7. $u = 2 \cdot 50 + 2 \cdot 50$, $u = 200$

8. kann nicht untersucht werden, da kein Definitionsbereich vorhanden ist.

Das Feld hat eine Breite von 50 m, eine Länge von 50 m und einen Umfang von 200 m.

3. Aufgabe

a) $E(x) = -3x^2 + 21x$ => $p(x) = -3x + 21$

$p(x) = 0$ => $0 = -3x + 21$ => $x = 7$

Die Sättigungsmenge liegt bei 7 ME.

b) $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -3x^2 + 21x - (0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 15x + 5)$

$G(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 + 6x - 5$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$ $\qquad 0 = -1{,}5x^2 + 3x + 6 \,|\, :(-1{,}5)$

$G'(x) = -1{,}5x^2 + 3x + 6$ $\qquad 0 = x^2 - 2x - 4$

$G''(x) = -3x + 3$ $\qquad$ p-q liefert $x_1 = 3{,}2$ und $[x_2 = -1{,}2]$

$G''(3{,}2) = -6{,}6 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$G(3{,}2) = 13{,}2$

Bei der gewinnmaximalen Menge von 3,2 ME wird der maximale Gewinn von 13,2 GE erreicht.

c) $K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 15x + 5$ $\qquad K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$ $\qquad K'(3) = 1{,}5$

$K'(x) = 1{,}5x^2 - 9x + 15$ $\qquad 0 = 3x - 9$ $\qquad GK_{min}(3|1{,}5)$

$K''(x) = 3x - 9$ $\qquad x = 3$

$K'''(x) = 3$ $\qquad K'''(3) = 3 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

Bei 3 ME liegt die geringste Kostensteigerung von 1,5 GE vor.

d) KPU mit variabler Stückkostenfunktion

$k_v(x) = 0{,}5x^2 - 4{,}5x + 15$

$k_v'(x) = x - 4{,}5$ und $k_v''(x) = 1$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = x - 4{,}5$

$x = 4{,}5$ $\qquad k''(4{,}5) = 1 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $\qquad k_v(4{,}5) = 4{,}9$

Die kurzfristige Preisuntergrenze von 4,9 GE kann der Betrieb bei einer Produktion von 4,5 ME anbieten.

4. Aufgabe

1. HB $V = a \cdot b \cdot c$ $\qquad$ Da die Hauptbedingung 3 Variablen hat, braucht man 2 Nebenbedingungen.

2. NB $96 = 4a + 4b + 4c$ und $a = 3c$

Die zweite Nebenbedingung wird zur Vereinfachung in die erste Nebenbedingung und in die Hauptbedingung eingesetzt.

Damit erhält man neu:

1.a HB $V = 3c \cdot b \cdot c$ also $V = 3c^2 \cdot b$

2.a NB $96 = 4 \cdot 3c + 4b + 4c$ also zusammengefasst $96 = 16c + 4b$

Nun kann man in Punkt 3 die zusammengefasste Nebenbedingung nach der Variablen b auflösen.

$96 = 16c + 4b \,|\, -16c$ $\quad$ $b = 0$

3. $96 - 16c = 4b \,|\, :4$ $\quad$ $0 = 24 - 4c$ $\quad$ => $\quad$ $D = [0;6]$

$b = 24 - 4c$ $\quad$ $c = 6$

4. $V(c) = c^2 \cdot (24 - 4c)$

$V(c) = -4c^3 + 24c^2$ **Zielfunktion**

5. $V'(c) = -12c^2 + 48c$ $\quad$ $V'(c) = 0 \wedge V''(c) \neq 0$

$V''(c) = -24c + 48$

$0 = -12c^2 + 48c \,|\, :(-12)$ $\quad$ c ausklammern ergibt $c_1 = 0$ und $c_2 = 4$

$0 = c^2 - 4c$

$V''(0) = 48 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$V''(4) = -48 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $b = 24 - 4 \cdot 4$ $\quad$ Hier muss jetzt auch noch die Seite a berechnet werden. $\quad$ $a = 3 \cdot 4$

$b = 8$ $\quad$ $a = 12$

Man setzt in die ursprüngliche Hauptbedingung ein.

7. $V = 12 \cdot 8 \cdot 4$ $\quad$ **8.** $V(0) = 0 < 384$

$V = 384$ $\quad$ $V(6) = 0 < 384$

Der Quader hat eine Länge von a = 12 cm, eine Breite von b = 8 cm, eine Höhe von c = 4 cm und ein Volumen von 384 cm³.

5. Aufgabe

a) $G(x) = E(x) - K(x)$

$E(x) = G(x) + K(x)$

$E(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 30 + x^3 - 8x^2 + 21x + 30$

$E(x) = -2x^2 + 12x$

$p(x) = -2x + 12$

$p(x) = 0$

$0 = -2x + 12$

$x = 6$ $\quad$ => $\quad$ $D_{ök} = [0;6]$

b) $G(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 30$ $\quad$ $0 = -3x^2 + 12x - 9 \,|\, :(-3)$

$G'(x) = -3x^2 + 12x - 9$ $\quad$ $0 = x^2 - 4x + 3$

$G''(x) = -6x + 12$ $\quad$ p-q liefert $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$ $\quad$ $G''(3) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$G''(1) = +6 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

Die gewinnmaximale Menge liegt bei 3 ME.

c) $p(3) = 6$ $\quad$ => $\quad$ $C(3|6)$

d) Berechnung des Betriebsminimums aus der variablen Stückkostenfunktion.

$k_v(x) = x^2 - 8x + 21$

$k_v'(x) = 2x - 8$ und $k_v''(x) = 2$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 8$

$x = 4$ $\quad k''(4) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $\quad$ BM = 4 ME

BM einsetzen in die Erlösfunktion

$E(x) = -2x^2 + 12x$

$E(4) = 16$

Das Betriebsminimum erzeugt einen Erlös von 16 GE.

e) $E(x) = -2x^2 + 12x$

$E'(x) = -4x + 12$

$E''(x) = -4$

$E'(x) = 0 \wedge E''(x) \neq 0$

$0 = -4x + 12$

$x = 3$

$E''(3) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$x_{E\,max} = 3$

einsetzen in k(x)

$K(x) = x^3 - 8x^2 + 21x + 30$

$k(x) = x^2 - 8x + 21 + \frac{30}{x}$

$k(3) = 16$

Ja, die erlösmaximale Menge von 3 ME erzeugt Stückkosten in Höhe von 16 GE.

f) $K(x) = x^3 - 8x^2 + 21x + 30$

$K'(x) = 3x^2 - 16x + 21$

$K'(5) = 16$

Grenzkosten geben die Kostensteigerung an, wenn man die Menge um 1 ME erhöht.
Verändert man bei 5 ME die Produktionsmenge um 1 ME, so ändern sich die Kosten um 16 GE.
Oder: Steigt an dieser Stelle die Menge um 1 ME, steigen die Kosten um 16 GE.