

Lösungen P 13

1. Aufgabe

a) $p(x) = -7x + 79$

$$E(x) = -7x^2 + 79x$$

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$G(x) = -7x^2 + 79x - (x^3 - 15x^2 + 75x + 32)$$

$$G(x) = -x^3 + 8x^2 + 4x - 32$$

$$G(x) = 0$$

$$0 = -x^3 + 8x^2 + 4x - 32 \quad | :(-1)$$

$$0 = x^3 - 8x^2 - 4x + 32$$

Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt $0 = x^2 - 6x - 16$

p-q ergibt $x_2 = 8$ und $[x_3 = -2]$

Die Gewinnschwelle liegt bei 2 ME und die Gewinngrenze bei 8 ME.

b) $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$$0 = -3x^2 + 16x + 4 \quad | :(-3)$$

$$G'(x) = -3x^2 + 16x + 4$$

$$0 = x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$G''(x) = -6x + 16$$

$$p-q \text{ liefert } x_1 = 5,6 \text{ und } [x_2 = -0,2]$$

$$G''(5,6) = -17,6 < 0 \Rightarrow \text{Max. } x_{G \max}$$

Cournot'scher Punkt

$C(x_{G \max} | p(x_{G \max}))$ gewinnmaximale Menge und zugehöriger Preis

$$p(5,6) = 39,8$$

$C(5,6 | 39,8)$ Bei 5,6 ME und einem Preis von 39,8 GE pro ME wird der maximale Gewinn erzielt.

c) $K'(x) = 3x^2 - 30x + 75$

Grenzkostenminimum

$$K'''(5) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

$$K''(x) = 6x - 30$$

$$K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$$

$$K'''(x) = 6$$

$$0 = 6x - 30$$

$$K'(5) = 0$$

$$x = 5$$

$$GK_{\min}(5 | 0)$$

d) kleinster Preis = KPU

$$k_v(x) = x^2 - 15x + 75$$

$$k_v'(x) = 2x - 15 \quad \text{und} \quad k_v''(x) = 2$$

$$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$$

$$0 = 2x - 15$$

$$k''(7,5) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.} \quad k_v(7,5) = 18,75$$

$$x = 7,5$$

Den kleinsten Preis von 18,75 GE kann der Betrieb bei einer Produktion von 7,5 ME anbieten.

2. Aufgabe

a) $D_{ok} = [0;7]$ heißt, bei 7 ME ist die Sättigungsmenge, dort hat die Erlösfunktion eine Nullstelle
 $\Rightarrow (7|0)$

Des Weiteren ist ein Punkt der Erlösfunktion mit $(2|20)$ gegeben.

Formuliert man nun die unbekannte Erlösfunktion mit $E(x) = ax^2 + bx$ (keine Konstante, da sie im Ursprung beginnt), kann man mit den zwei Punkten zwei Gleichungen erstellen und das lineare Gleichungssystem berechnen.

$$\begin{array}{lll}
E(7) = 0 & 0 = 49a + 7b \cdot (-2) & 0 = -98a - 14b \\
E(2) = 20 & 20 = 4a + 2b \cdot 7 & \underline{140 = 28a + 14b} \\
& & 140 = -70a
\end{array}$$

Also ist $a = -2$ und man berechnet $b = 14$.

Somit lautet die Erlösfunktion: $E(x) = -2x^2 + 14x$

Und die Preis-Absatz-Funktion: $p(x) = -2x + 14$

b) $G(x) = E(x) - K(x)$

$$G(x) = -2x^2 + 14x - (x^3 - 8x^2 - 3x + 50)$$

$$G(x) = -2x^2 + 14x - x^3 + 8x^2 + 3x - 50$$

$$G(x) = -x^3 + 6x^2 + 17x - 50$$

$$G(x) = 0$$

$$0 = -x^3 + 6x^2 + 17x - 50 \quad | :(-1) \quad \text{Polynomdivision mit } x_1 = 2 \text{ ergibt } 0 = x^2 - 4x - 25$$

$$0 = x^3 - 6x^2 - 17x + 50$$

$$p\text{-}q \text{ liefert } x_2 = 7,4 \text{ und } [x_3 = -3,4]$$

Die Gewinnschwelle GS liegt bei 2 ME, die Gewinngrenze GG bei 7,4 ME.

c) gewinnmaximale Ausbringungsmenge $x_{G \max}$ mit

$$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0 \quad 0 = -3x^2 + 12x + 17 \quad | :(-3)$$

$$G'(x) = -3x^2 + 12x + 17 \quad 0 = x^2 - 4x - \frac{17}{3}$$

$$G''(x) = -6x + 12 \quad p\text{-}q \text{ liefert } x_1 = 5,1 \text{ und } [x_3 = -1,1]$$

$$G''(5,1) = -18,6 < 0 \Rightarrow \text{Max. } x_{G \max}$$

$$G(5,1) = 60,1$$

Die gewinnmaximale Menge beträgt 5,1 ME ,der zugehörige Gewinn (Gewinnmaximum) 60,1 GE.

d) $C(x_{G \max} | p(x_{G \max})) \quad p(5,1) = 3,8 \quad C(5,1|3,8)$

Bei 5,1 ME muss man pro ME einen Preis von 3,8 GE verlangen, um den maximalen Gewinn zu erzielen.

e) $k(x) = x^2 - 8x - 3 + \frac{50}{x}$

$$k'(x) = 2x - 8 - \frac{50}{x^2} \quad \text{und} \quad k''(x) = 2 + \frac{100}{x^3}$$

$$k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$$

$$0 = 2x - 8 - \frac{50}{x^2} \quad | \cdot x^2$$

$$\text{Polynomdivision mit } x_1 = 5 \text{ ergibt } 0 = x^2 + x + 5$$

$$0 = 2x^3 - 8x^2 - 50 \quad | :2$$

$$0 = x^3 - 4x^2 + 0x - 25$$

In der p-q-Formel ergibt sich eine negative Wurzel. Somit existieren keine weiteren Lösungen für x.

$$k''(5) = 2,8 > 0 \Rightarrow \text{Min.} \quad \text{BO} = 5 \text{ ME}$$

$k(5) = -8$ **ACHTUNG:** Hier ist leider ein Fehler enthalten!!! Die LPU muss natürlich einen positiven Wert haben. Das ist hier bei der gegebenen Kostenfunktion offenbar nicht möglich. Der Rechenweg ist aber richtig.

3. Aufgabe

- a) $E(x) = -4x^2 + 102x$ $p(x) = E(x) : x$
 $p(x) = -4x + 102$ Der Höchstpreis liegt bei 102 GE.
 $p(x) = 0$
 $0 = -4x + 102$ Die Sättigungsmenge wird bei 25,5 ME erreicht.
 $x = 25,5$
- b) $E'(x) = -8x + 102$ $E'(x) = 0 \wedge E''(x) \neq 0$
 $E''(x) = -8$
 $0 = -8x + 102$ $E''(12,75) = -8 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$ $E(12,75) = 650,25$
 $x = 12,75$
Das Erlösmaximum von 650,25 GE wird mit 12,75 ME erreicht.
- c) $G(x) = -0,5x^3 + 130x - 256$ $G(x) = 0$
 $0 = -0,5x^3 + 130x - 256 \mid : (-0,5)$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt $0 = x^2 + 2x - 256$
 $0 = x^3 + 0x^2 - 260x + 512$
p-q liefert $x_2 = 15$ und $[x_3 = -17]$
Die GS liegt bei 2 ME, Die GG bei 15 ME.
- d) $G'(x) = -1,5x^2 + 130$ $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$ $0 = -1,5x^2 + 130 \mid : (-1,5)$
 $G''(x) = -3x$ $0 = x^2 - 86,7 \mid + 86,7$
Wurzel ziehen ergibt $x_1 = 9,3$ und $[x_3 = -9,3]$
 $G''(9,3) = -27,9 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$ $G(9,3) = 550,8$
Das Gewinnmaximum beträgt 550,8 GE und wird mit 9,3 ME erreicht.
- e) $p(x) = -4x + 102$
 $p(9,3) = 64,8$ $C(9,3 \mid 64,8)$
Bei 9,3 ME und einem Preis von 64,8 GE pro Mengeneinheit macht man den maximalen Gewinn.
- f) $G(x) = E(x) - K(x)$ $\Rightarrow K(x) = E(x) - G(x)$
 $K(x) = -4x^2 + 102x - (-0,5x^3 + 130x - 256)$
Klammer auflösen und zusammenfassen ergibt $K(x) = 0,5x^3 - 4x^2 - 28x + 256$
 $K'(x) = 1,5x^2 - 8x - 28$
 $K'(8) = 4$ Bei 8 ME liegen die Grenzkosten bei 4 GE.
- g) $K(x) = 0,5x^3 - 4x^2 - 28x + 256$ $\Rightarrow k_v(x) = 0,5x^2 - 4x - 28$
 $24,5 = 0,5x^2 - 4x - 28 \mid - 24,5$
 $0 = 0,5x^2 - 4x - 52,5 \mid : 0,5$ p-q liefert $x_1 = 15$ und $[x_2 = -7]$
 $0 = x^2 - 8x - 105$
Bei 15 ME entstehen variable Stückkosten von 24,5 GE.

4. Aufgabe

a) $K'(x) = 15x^2 - 120x + 250$

$$K''(x) = 30x - 120$$

$$K'''(x) = 30$$

$$K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$$

$$0 = 30x - 120$$

$$x = 4$$

$$K'''(4) = 30 > 0 \Rightarrow \text{Min.} \quad K'(4) = 10 \quad \text{GK}_{\min}(4|10)$$

Bei 4 ME liegt die geringste Kostensteigerung mit 10 GE vor.

b) $p(x) = -8x + 96$

$$E(x) = -8x^2 + 96x$$

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$G(x) = -8x^2 + 96x - (5x^3 - 60x^2 + 250x + 200)$$

$$G(x) = -5x^3 + 52x^2 - 154x - 200$$

c) $G'(x) = -15x^2 + 104x - 154$

$$G''(x) = -30x + 104$$

$$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$$

$$0 = -15x^2 + 104x - 154 \mid : (-15)$$

$$0 = x^2 - 6,9x + 10,3 \quad \text{p-q liefert } x_1 = 4,7 \text{ und } x_2 = 2,2$$

$$G''(4,7) = -37 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

$$G''(2,2) = 39 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

$$G(4,7) = -294,2 \quad \text{ACHTUNG: Hier ist leider ein Fehler}$$

enthalten!!! Der maximale Gewinn muss natürlich einen positiven Wert haben. Das ist hier bei der angegebenen Aufgabenstellung offenbar nicht möglich. Der Rechenweg ist aber richtig.

d) $k(x) = 5x^2 - 60x + 250 + \frac{200}{x}$

$$170 = 5x^2 - 60x + 250 + \frac{200}{x} \mid \cdot x$$

$$170x = 5x^3 - 60x^2 + 250x + 200 \mid - 170x$$

$$0 = 5x^3 - 60x^2 + 80x + 200 \mid : 5$$

$$0 = x^3 - 12x^2 + 16x + 40$$

$$\text{Polynomdivision mit } x_1 = 10 \text{ ergibt } 0 = x^2 - 2x - 4$$

$$\text{p-q liefert } x_2 = 3,2 \text{ und } [x_3 = -1,2]$$

Stückkosten von 170 GE fallen bei 3,2 ME und 10 ME an.