# Lösungen PV BW 2

## Aufgabe 1

1.1 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

| Angaben | Mathematisierung | Gleichungen | |
|---|---|---|---|
| $x = 2\,;\, m = 0$ | $f'(2) = 0$ | I | $0 = 12a + 4b + c$ |
| $P(0\|0)$ | $f(0) = 0$ | II | $0 = d$ |
| $x = 0\,;\, m = 1{,}2$ | $f'(0) = 1{,}2$ | III | $1{,}2 = c$ |
| $x = 4\,;\, m = -3{,}6$ | $f'(4) = -3{,}6$ | IV | $-3{,}6 = 48a + 8b + c$ |

Variable c einsetzen.

I $\quad 0 = 12a + 4b + 1{,}2 \quad |-1{,}2$ $\quad$ I $\quad -1{,}2 = 12a + 4b \quad |\cdot(-2)$ $\quad$ I $\quad 2{,}4 = -24a - 8b$

IV $\quad -3{,}6 = 48a + 8b + 1{,}2 \quad |-1{,}2$ $\quad$ IV $\quad -4{,}8 = 48a + 8b$ $\quad$ IV $\quad -4{,}8 = 48a + 8b$

I + IV ergibt $\;-2{,}4 = 24a \;\Rightarrow a = -0{,}1$ einsetzen in I $\Rightarrow b = 0$

$f(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}2x$

1.2

$f(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}2x$

$f'(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}2$

$f''(x) = -0{,}6x$

$f'''(x) = -0{,}6$

Die Funktion ist punktsymmetrisch, da nur ungerade Exponenten vorhanden sind.

$S_y(0|0)$ und für $S_x$ $\;f(x) = 0$ =>

$0 = -0{,}1x^3 + 1{,}2x \,|: (-0{,}1)$

$0 = x^3 - 12x$ Ausklammern von x ergibt $x_1 = 0$ und

$0 = x^2 - 12$ Umstellen und Wurzel ziehen ergibt $x_2 = 3{,}5$ und $x_3 = -3{,}5$

$S_{x1}(0|0)\;\; S_{x2}(3{,}5|0)\;\; S_{x3}(-3{,}5|0)$

Extrempunkte

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$0 = -0{,}3x^2 + 1{,}2 \,|: (-0{,}3)$

$0 = x^2 - 4$ Umstellen und Wurzel ziehen ergibt $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

$f''(2) = -1{,}2 < 0 \Rightarrow H \qquad f(2) = 1{,}6 \qquad H(2|1{,}6)$

$f''(-2) = 1{,}2 > 0 \Rightarrow T \qquad f(-2) = -1{,}6 \qquad T(-2|-1{,}6)$

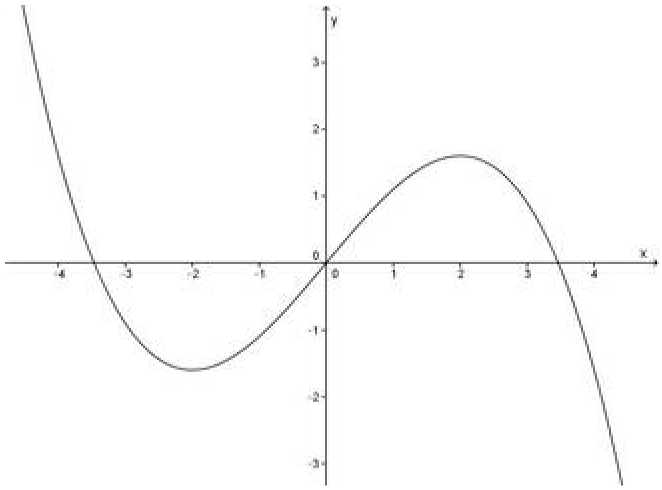
Wendepunkte

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$0 = -0{,}6x$

$0 = x \qquad f'''(0) = -0{,}6 < 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt} \qquad f(0) = 0 \qquad W(0|0)$

7. Zeichnung



**Aufgabe 2**

2.1
Zuerst Schnittpunkte von f(x) und g(x) berechnen, dann Fläche über Integral ermitteln

$f(x) = g(x)$

$-0{,}1x^3 + 1{,}2x = 0{,}5x^2 - x - 14$ Umformen

$0 = 0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 - 2{,}2x - 14 \,|: (0{,}1)$

$0 = x^3 + 5x^2 - 22x - 140$ Polynomdivision mit $x_1 = 5$ liefert

$0 = x^2 + 10x + 28$ p-q-Formel ergibt negative Wurzel
=> keine weiteren Lösungen

$x \in [-3;5]$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

$$A = \int_{-3}^{5} (-0{,}1x^3 + 1{,}2x - (0{,}5x^2 - x - 14))dx$$

$$A = \int_{-3}^{5} (-0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 + 2{,}2x + 14)dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{40}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 1{,}1x^2 + 14x\right]_{-3}^{5}$$

$A = [61{,}04] - [29{,}625]$

$A = 90{,}7FE$

1 LE = 10 m => 1 FE = 100 m²

$90{,}7FE \cdot 100m^2 / FE = 9070m^2$

Der See hat eine Fläche von 9070 Quadratmeter.

2.2
Differenzrechnung der Funktionswerte von f(x) und g(x)
Staumauer $x = -3$

$f(-3) = -0{,}9$

$g(-3) = -6{,}5$

Differenzrechnung $d = -0{,}9 - (-6{,}5) = 5{,}6$

Da 1 LE = 10 m ergibt sich $5{,}6 \cdot 10\text{m} = 56\text{m}$
Die Staumauer hat eine Länge von 56 Metern.

2.3
Extremwertaufgabe
Gesucht: größter Abstand der Seeufer = maximale Differenz der Funktionswerte
Da f(x) über g(x) liegt, gilt:
$D(x) = f(x) - g(x)$

$D(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 + 2{,}2x + 14$

$D'(x) = -0{,}3x^2 - x + 2{,}2$

$D''(x) = -0{,}6x - 1$

$D'(x) = 0 \wedge D''(x) \neq 0$

$0 = -0{,}3x^2 - x + 2{,}2 \,|\, : (-0{,}3)$

$0 = x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{22}{3}$ p-q-Formel ergibt $x_1 = 1{,}5$ und $[x_2 = -4{,}8]$

$D''(1{,}5) = -1{,}9 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$D(1{,}5) = 15{,}8$

$15{,}8\text{LE} \cdot 10\text{m}/\text{LE} = 158\text{m}$

Die Seeufer haben ihren größten Abstand mit 158 Metern.

2.4
$t(x) = m \cdot x + b$

$x = 1$

$f(1) = 1{,}1$ y-Wert

$f'(x) = m$

$f'(1) = 0{,}9$

$1{,}1 = 0{,}9 \cdot 1 + b$

$0{,}2 = b$

$t(x) = 0{,}9x + 0{,}2$

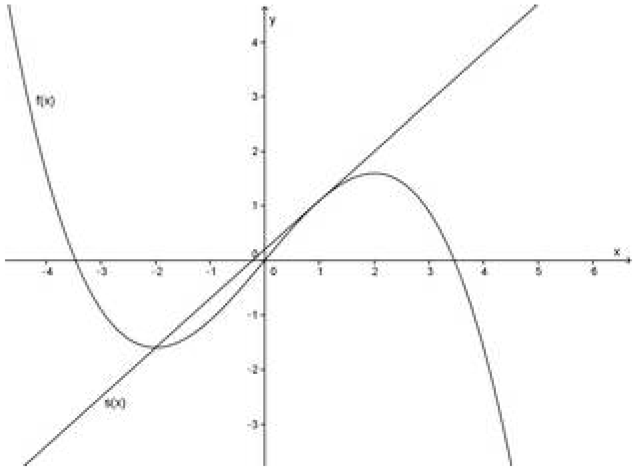
Die Gleichung entspricht der Straße.

2.5
Prüfen, ob die beiden y-Werte in f(x) und s(x) übereinstimmen.
$s(-3) = -2{,}5$

$f(-3) = -0{,}9$

Die Werte stimmen nicht überein. Die Straße kann nicht an der Staumauer beginnen, da sie sonst durch den See führen würde.

2.6



2.7
$m=0{,}9$ und $f'(x)=m$
$f'(x)=-0{,}3x^2+1{,}2$
$0{,}9=-0{,}3x^2+1{,}2 \mid -1{,}2$
$-0{,}3=-0{,}3x^2 \mid :(-0{,}3)$
$1=x^2$ Wurzel ziehen ergibt $x_1=1$ und $x_2=-1$
Die weitere Stelle mit der Steigung 0,9 ist bei x = -1.
An der Stelle -1 würde die Straße aber auch im See verlaufen.

**Aufgabe 3**

3.1
Wenn sich Einnahmen und Ausgaben genau decken, hat man keinen Gewinn.
Gewinnschwelle und Gewinngrenze berechnen
$p(x)=90$
$E(x)=90x$
$G(x)=E(x)-K(x)$
$G(x)=90x-(x^3-15x^2+84x+64)$
$G(x)=-x^3+15x^2+6x-64$
$G(x)=0$
$0=-x^3+15x^2+6x-64 \mid :(-1)$
$0=x^3-15x^2-6x+64$ Polynomdivision mit $x_1=2$ liefert
$x^2-13x-32=0$ p-q-Formel ergibt $x_2=15{,}1$ und $[x_3=-2{,}1]$
GS = 2 ME
GG = 15,1 ME
Bei x < GS und x > GG entsteht Verlust.
Zwischen Gewinnschwelle und Gewinngrenze liegt die Gewinnzone, in der das Unternehmen Gewinn macht.

3.2
$G'(x)=-3x^2+30x+6$
$G''(x)=-6x+30$ $G'(x)=0 \wedge G''(x)\neq 0$
$0=-3x^2+30x+6 \mid :(-3)$
$0=x^2-10x-2$ p-q-Formel ergibt $x_1=10{,}2$ und $[x_2=-0{,}2]$
$G''(10{,}2)=-31{,}2<0 \Rightarrow \text{Max.}$
$G(10{,}2)=496{,}6\text{GE}$
Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge liegt bei 10,2 ME und der maximale Gewinn beträgt 496,6GE.

3.3
Niedrigster Preis = KPU gesucht => $K(x)=x^3-15x^2+84x+64$ und $k_V(x)=\frac{K_V(x)}{x}$
$k_V(x)=x^2-15x+84$ variable Stückkostenfunktion

$k_V'(x) = 2x - 15$

$k_V''(x) = 2$ $\qquad\qquad$ $k_V'(x) = 0 \wedge k_V''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 15$

$x = 7{,}5\text{ME}$ BM (Betriebsminimum)

$k_V''(7{,}5) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$k_V(7{,}5) = 27{,}75\text{GE}$ KPU (Kurzfristige Preisuntergrenze)

Setzt man 7,5 ME zu diesem Preis ab, deckt man nur die variablen Kosten. Die fixen Kosten von 64 GE entstehen als Verlust. Deshalb ist dieser Preis nur kurzfristig haltbar.

3.4

LPU gesucht => $K(x) = x^3 - 15x^2 + 84x + 64$ und $k(x) = \frac{K(x)}{x}$

$k(x) = x^2 - 15x + 84 + \frac{64}{x}$ $\qquad$ Stückkostenfunktion

$k'(x) = 2x - 15 - \frac{64}{x^2}$

$k''(x) = 2 + \frac{128}{x^3}$ $\qquad\qquad$ $k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 15 - \frac{64}{x^2} \,\Big|\cdot x^2$

$0 = 2x^3 - 15x^2 - 64 \,|:2$

$0 = x^3 - 7{,}5x^2 - 32$ $\qquad$ Polynomdivision mit $x_1 = 8$ ergibt

$0 = x^2 + 0{,}5x + 4$ $\qquad$ p-q-Formel ergibt negative Wurzel

=> keine weiteren Lösungen

$k''(8) = 2{,}25 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$k(8) = 36\text{GE}$

Setzt man langfristig 8 ME zu diesem Preis ab, deckt man die gesamten Kosten. Es wird aber kein Gewinn erzielt und somit keine Rücklagen für Investitionen geschaffen. Das Bestehen des Betriebs ist gefährdet.