Lösungen Prüfungsvorbereitung (1)

Aufgabe 1

1.1 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$x = 2; m = -2$	$f'(2) = -2$	I	$-2 = 12a + 4b + c$
$P(0\|4)$	$f(0) = 4$	II	$4 = d$
$P(4\|0)$	$f(4) = 0$	III	$0 = 64a + 16b + 4c + d$
$x = 4; m = 0$	$f'(4) = 0$	IV	$0 = 48a + 8b + c$

Variablen d einsetzen.

I $\quad -2 = 12a + 4b + c$	I $\quad -2 = 12a + 4b + c$	I $\quad -2 = 12a + 4b + c$
III $\quad 0 = 64a + 16b + 4c + 4 \mid -4$	III $\quad -4 = 64a + 16b + 4c \mid :(-4)$	III $\quad 1 = -16a - 4b - c$
IV $\quad 0 = 48a + 8b + c$	IV $\quad 0 = 48a + 8b + c$	IV $\quad 0 = 48a + 8b + c$

I + III ergibt $\quad -1 = -4a \quad \Rightarrow a = 0,25$ einsetzen in V $\Rightarrow b = -1,75$

III + IV ergibt $\quad$ V $\; 1 = 32a + 4b \quad$ a und b einsetzen in IV $\Rightarrow c = 2$

$f(x) = 0,25x^3 - 1,75x^2 + 2x + 4$

1.2 $f(x) = 0,25x^3 - 0,75x^2 - 2,5x + 6$

$f'(x) = 0,75x^2 - 1,5x - 2,5$

$f''(x) = 1,5x - 1,5$

$f'''(x) = 1,5$

Keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten

$S_y(0|6)$ durch Ablesen der Konstante; für S_x gilt: $f(x) = 0$

$0 = 0,25x^3 - 0,75x^2 - 2,5x + 6 \mid : 0,25$

$0 = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ $\qquad$ Polynomdivision mit $x_1 = 4$ ergibt

$0 = x^2 + x - 6$ $\qquad$ p-q-Formel liefert $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$

$S_{x1}(4|0) \quad S_{x2}(2|0) \quad S_{x3}(-3|0)$

Extrempunkte

$f'(x) = 0 \;\wedge\; f''(x) \neq 0$

$0 = 0,75x^2 - 1,5x - 2,5 \mid : 0,75$

$0 = x^2 - 2x - \frac{10}{3}$ $\qquad$ p-q-Formel liefert $x_1 = 3,1$ und $x_2 = -1,1$

$f''(3,1) = 3,2 > 0 \Rightarrow T \qquad f(3,1) = -1,5 \qquad T(3,1|-1,5)$

$f''(-1,1) = -3,2 < 0 \Rightarrow H \qquad f(-1,1) = 7,5 \qquad H(-1,1|7,5)$

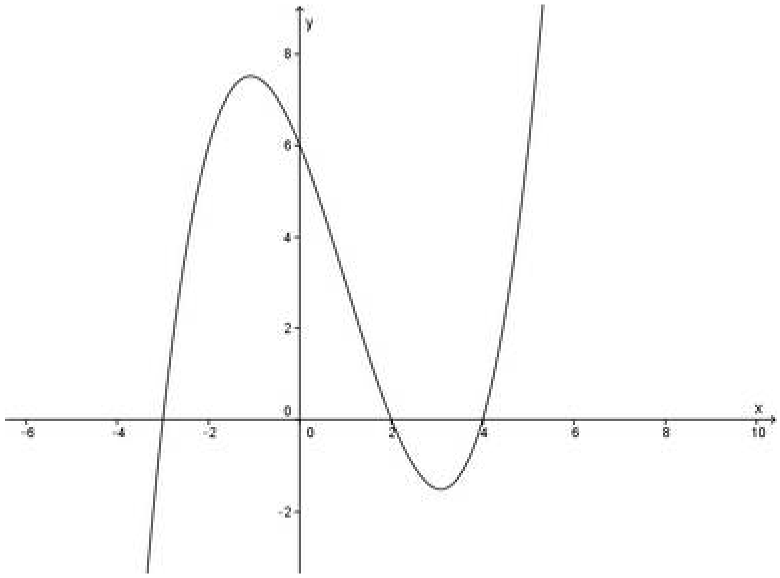
Wendepunkt

$f''(x) = 0 \;\wedge\; f'''(x) \neq 0$

$0 = 1,5x - 1,5 \qquad x = 1$

$f'''(1) = 1,5 > 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt} \qquad f(1) = 3 \qquad W(1|3)$

Zeichnung



1.3

$\tan\alpha = m$

$\tan - 68{,}2° = m$

$-2{,}5 = m$

Da die Steigung gegeben ist, werden die Stellen (x-Werte) gesucht.

$f'(x) = m$

$f'(x) = 0{,}75x^2 - 1{,}5x - 2{,}5$ und $m = -2{,}5$

$-2{,}5 = 0{,}75x^2 - 1{,}5x - 2{,}5 \,|+2{,}5$

$0 = 0{,}75x^2 - 1{,}5x \,|:0{,}75$

$0 = x^2 - 1x$

$0 = x(x-2)$ $\qquad x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

Die zugehörigen Funktionswerte (y-Werte) werden in der Ausgangsgleichung von f(x) berechnet.

$f(0) = 6$ und $f(2) = 0$

Die allgemeine Tangentengleichung lautet: $t(x) = m \cdot x + b$

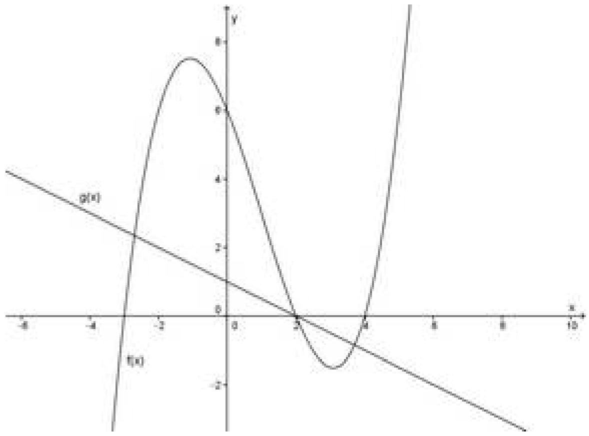
Die Werte für x, y, m sind bekannt.

$x_1 = 0$	$x_2 = 2$
$f(0) = 6$	$f(2) = 0$
$m = -2{,}5$	$m = -2{,}5$
$6 = -2{,}5 \cdot 0 + b$	$0 = -2{,}5 \cdot 2 + b$
$6 = b$	$5 = b$
$t_1(x) = -2{,}5x + 6$	$t_2(x) = -2{,}5x + 5$

1.4

Betrachtet man den Verlauf der beiden Tangenten mit dem von Schaubild von f(x), so erkennt man, dass $t_1(x)$ den Graphen im Hochpunktbereich nicht mehr schneiden kann, da sie dort außen anliegt $P(0|6)$. Die Tangente $t_2(x)$ liegt im Punkt $P(2|0)$ an, also deutlich unterhalb des Wendepunktes (Krümmungswechsels), und kann somit fast mittig durch den Hochpunkt verlaufen.

1.5



1.6
Die Funktion f(x) bildet mit der x-Achse zwei Flächen.

$$A_1 = \int_{-3}^{2} (0{,}25x^3 - 0{,}75x^2 - 2{,}5x + 6)dx$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 6x\right]_{-3}^{2}$$

$$A_1 = [6] - \left[-17\frac{7}{16}\right]$$

$$A_1 = 23\frac{7}{16} = 23{,}4FE$$

$$A_2 = \left|\int_{2}^{4} (0{,}25x^3 - 0{,}75x^2 - 2{,}5x + 6)dx\right|$$

$$A_2 = \left|\left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 6x\right]_{2}^{4}\right|$$

$$A_2 = \left|[4] - [6]\right|$$

$$A_2 = |-2|$$

$$A_2 = 2FE$$

$$A_{ges} = A_1 + A_2 = 23{,}4 + 2 = 25{,}4FE$$

1.7
Die Funktionen f(x) und g(x) begrenzen ebenfalls zwei Flächen. Die Schnittstellen der beiden Funktionen sind die Grenzen des jeweiligen Integrals.

$$f(x) = g(x)$$

$$0{,}25x^3 - 0{,}75x^2 - 2{,}5x + 6 = -0{,}5x + 1 \quad | + 0{,}5x - 1$$

$$0{,}25x^3 - 0{,}75x^2 - 2x + 5 = 0 \quad | : 0{,}25$$

$0 = x^3 - 3x^2 - 8x + 20$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$ (aus Zeichnung) ergibt

$0 = x^2 - x - 10$ p-q-Formel liefert $x_2 = 3{,}7$ und $x_3 = -2{,}7$

$$A = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))dx$$

$$A_1 = \int_{-2{,}7}^{2} (0{,}25x^3 - 0{,}75x^2 - 2x + 5)dx$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 5x\right]_{-2{,}7}^{2}$$

$$A_1 = [5] - [-12{,}5]$$

$$A_1 = 17{,}5FE$$

$$A_2 = \left|\int_{2}^{3{,}7} (0{,}25x^3 - 0{,}75x^2 - 2x + 5)dx\right|$$

$$A_2 = \left|\left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 5x\right]_{2}^{3{,}7}\right|$$

$$A_2 = \left|[3{,}9] - [5]\right|$$

$$A_2 = |-1{,}1|$$

$$A_2 = 1{,}1FE$$

$$A_{ges} = A_1 + A_2 = 17{,}5 + 1{,}1 = 18{,}6FE$$

Aufgabe 2

2.1 $f(x)=0{,}2x^4-0{,}8x^3-0{,}6x^2+3{,}6x$

$f'(x)=0{,}8x^3-2{,}4x^2-1{,}2x+3{,}6$

$f''(x)=2{,}4x^2-4{,}8x-1{,}2$

$f'''(x)=4{,}8x-4{,}8$

Keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten

$S_y(0|0)$ durch Ablesen der Konstante; für S_x gilt: $f(x)=0$

$0=0{,}2x^4-0{,}8x^3-0{,}6x^2+3{,}6x \,|:0{,}2$

$0=x^4-4x^3-3x^2+18x$ Ausklammern von x ergibt $x_1=0$ und

$0=x^3-4x^2-3x+18$ Polynomdivision mit $x_2=-2$ ergibt

$0=x^2-6x+9$ p-q-Formel liefert $x_{3/4}=3$

$S_{x1}(0|0)$ $S_{x2}(-2|0)$ $S_{x3/4}(3|0)$

Extrempunkte

$f'(x)=0 \;\wedge\; f''(x)\neq 0$

$0=0{,}8x^3-2{,}4x^2-1{,}2x+3{,}6 \,|:0{,}8$

$0=x^3-3x^2-1{,}5x+4{,}5$ Polynomdivision mit $x_1=3$ (dopp. Nst.) ergibt

$0=x^2-1{,}5$ Wurzel ziehen ergibt $x_2=1{,}2$ und $x_3=-1{,}2$

$f''(3)=6>0\Rightarrow T$ $f(3)=0$ $T_1(3|0)$

$f''(1{,}2)=-3{,}9<0\Rightarrow H$ $f(1{,}2)=2{,}5$ $H(1{,}2|2{,}5)$

$f''(-1{,}2)=8{,}0>0\Rightarrow T$ $f(-1{,}2)=-3{,}4$ $T_2(-1{,}2|-3{,}4)$

Wendepunkte

$f''(x)=0 \;\wedge\; f'''(x)\neq 0$

$0=2{,}4x^2-4{,}8x-1{,}2 \,|2{,}4$

$0=x^2-2x-0{,}5$ p-q-Formel liefert $x_1=2{,}2$ und $x_2=-0{,}2$

$f'''(2{,}2)=5{,}8>0\Rightarrow \text{Wendepunkt}$ $f(2{,}2)=1{,}2$ $W_1(2{,}2|1{,}2)$

$f'''(-0{,}2)=-5{,}8<0\Rightarrow \text{Wendepunkt}$ $f(-0{,}2)=-0{,}7$ $W_2(-0{,}2|-0{,}7)$

2.2

Tangentengleichung $t(x)=m\cdot x+b$

$x=1$

$f(1)=2{,}4$ y-Wert

$f'(1)=0{,}8$ Steigung m

$2{,}4=0{,}8\cdot 1+b$

$1{,}6=b$

$t(x)=0{,}8x+1{,}6$

2.3

$f(x)=t(x)$

$0{,}2x^4-0{,}8x^3-0{,}6x^2+3{,}6x=0{,}8x+1{,}6 \,|-0{,}8x-1{,}6$

$0=0{,}2x^4-0{,}8x^3-0{,}6x^2+2{,}8x-1{,}6 \,|:0{,}2$

$0=x^4-4x^3-3x^2+14x-8$ Polynomdivision mit $x_1=1$ (Tangente) ergibt

$0 = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ weitere Polynomdivision mit $x_2 = 1$ ergibt
(Die Tangentenstelle ist eine Berührstelle und somit ein doppelter Schnittpunkt, also zweimal der Teiler.)

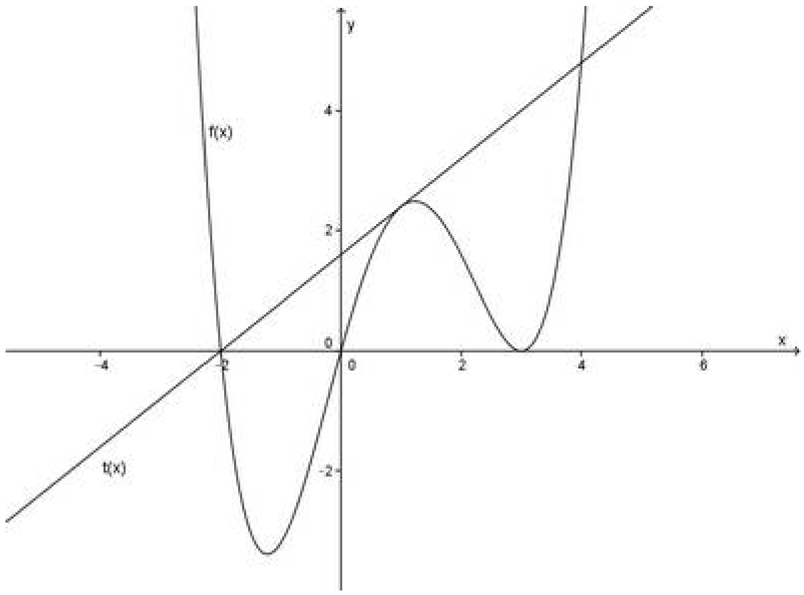
$0 = x^2 - 2x - 8$ p-q-Formel liefert $x_3 = 4$ und $x_4 = -2$

$f(1) = 2{,}4$ $S_{1/2}(1|2{,}4)$ Berührpunkt mit der Tangente

$f(4) = 4{,}8$ $S_3(4|4{,}8)$

$f(-2) = 0$ $S_4(-2|0)$

2.3



2.4

Da die Schnittstellen schon berechnet wurden, kann man sofort integrieren.

$$A = \int_a^b (t(x) - f(x))dx$$

Die Tangente liegt bei beiden Flächen über der Funktion f(x), deshalb ist es günstig, die Differenz t(x) – f(x) zu bilden, da nun beide Flächen ein positives Ergebnis haben und somit keine Betragstriche benötigt werden.

$$A_1 = \int_{-2}^{1} (-0{,}2x^4 + 0{,}8x^3 + 0{,}6x^2 - 2{,}8x + 1{,}6)dx$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{25}x^5 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{5}x^3 - 1{,}4x^2 + 1{,}6x\right]_{-2}^{1}$$

$$A_1 = [0{,}56] - [-5{,}92]$$

$$A_1 = 6{,}5FE$$

$$A_2 = \int_{1}^{4} (-0{,}2x^4 + 0{,}8x^3 + 0{,}6x^2 - 2{,}8x + 1{,}6)dx$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{25}x^5 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{5}x^3 - 1{,}4x^2 + 1{,}6x\right]_{1}^{4}$$

$$A_2 = [7{,}04] - [0{,}56]$$

$$A_2 = 6{,}5FE$$

$$A_{ges} = A_1 + A_2 = 6{,}5 + 6{,}5 = 13FE$$

Aufgabe 3

3.1

$E'(x) = -x + 61 \quad \Rightarrow E(x) = -0{,}5x^2 + 61x$

$G'(x) = -1{,}5x^2 + 11x + 36 \quad \Rightarrow G(x) = -0{,}5x^3 + 5{,}5x^2 + 36x + d$

Punkt $(5|55)$ einsetzen in die Gewinnfunktion, um d zu berechnen.

$55 = -0{,}5 \cdot 5^3 + 5{,}5 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5 + d$ also $55 = 255 + d$ somit $-200 = d$

$G(x) = -0{,}5x^3 + 5{,}5x^2 + 36x - 200$

$G(x) = E(x) - K(x) \mid + K(x)$

$G(x) + K(x) = E(x) \mid - G(x)$

$K(x) = E(x) - G(x)$

$K(x) = -0{,}5x^2 + 61x - (-0{,}5x^3 + 5{,}5x^2 + 36x - 200)$

$K(x) = -0{,}5x^2 + 61x + 0{,}5x^3 - 5{,}5x^2 - 36x + 200$

$K(x) = 0{,}5x^3 - 6x^2 + 25x + 200$

3.2

$K'(x) = 1{,}5x^2 - 12x + 25$

$K''(x) = 3x - 12$

$K'''(x) = 3$

$K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$

$0 = 3x - 12$

$x = 4\text{ME}$

$K'''(4) = 3 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$K'(4) = 1\text{GE}$

$GK_{min}(4|1)$

3.3

Der niedrigste Preis ist die KPU.

$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$

$k_v(x) = 0{,}5x^2 - 6x + 25$

$k_v'(x) = x - 6$

$k_v''(x) = 1$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = x - 6$

$x = 6$

$k_v''(6) = 1 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$k_v(6) = 7\text{GE}$

Der niedrigste Preis beträgt 7 GE bei einer Produktion von 6 ME.

3.4

$E(x) = -0,5x^2 + 61x \quad \Rightarrow p(x) = -0,5x + 61$

$p(x) = 0$

$0 = -0,5x + 61$

$x = 122ME \qquad \Rightarrow D_{ök} = [0;122]$

3.5

$G(x) = -0,5x^3 + 5,5x^2 + 36x - 200$

$G'(x) = -1,5x^2 + 11x + 36$

$G''(x) = -3x + 11$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$0 = -1,5x^2 + 11x + 36 |: (-1,5)$

$0 = x^2 - \frac{22}{3}x - 24 |: (-1,5)$ p-q-Formel liefert $x_1 = 9,8$ und $[x_2 = -2,5]$

$G''(9,8) = -18,4 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$G(9,8) = 210,4GE$

Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge liegt bei 9,8 ME und der maximale Gewinn bei 210,4 GE.

$p(9,8) = 56,1GE$

$C(9,8|56,1)$

Man muss 9,8 ME produzieren und zu 56,1 GE pro ME verkaufen, dann erzielt man den maximalen Gewinn.

3.6

$G(x) = 0$

$0 = -0,5x^3 + 5,5x^2 + 36x - 200 |: (-0,5)$

$0 = x^3 - 11x^2 - 72x + 400$ Polynomdivision mit $x_1 = 4$ ergibt

$0 = x^2 - 7x - 100$ p-q-Formel liefert $x_2 = 14,1$ und $[x_3 = -7,1]$

Die GS liegt bei 4 ME und die GG bei 14,1 ME.