Lösungen O 18

1. Aufgabe

a) $f(0)=80$ Zu Beginn waren 80 Autos am Parkplatz.

b) $f(t)=-5t^4+40t^2+80$

$f'(t)=-20t^3+80t$

$f''(t)=-60t^2+80$

$f'''(t)=-120t$

$f'(t_E)=0$

$0=-20t^3+80t \mid :(-20)$

$0=t^3-4t$

$0=t(t^2-4)$

$t_{E1}=0$ und $0=t^2-4 \mid +4 \mid \sqrt{\ }$

$t_{E2}=2$ und $t_{E3}=-2\notin D$

$f'(t_E)=0 \wedge f''(t_E)\neq 0$

$f''(0)=80>0 \Rightarrow$ Min.

$f''(2)=-160<0 \Rightarrow$ Max.

$f(2)=160$

Die höchste Belegung der Parkplätze waren 160 Autos.

c) $f''(t_W)=0$

$0=-60t^2+80 \mid :(-60)$

$0=t^2-\frac{4}{3}$

$t^2=\frac{4}{3} \mid \sqrt{\ }$

$t_{W1}\approx 1{,}15$ und $t_{W2}\approx -1{,}15\notin D$

$f''(t_W)=0 \wedge f'''(t_W)\neq 0$

$f'''(1{,}15)=-138<0 \Rightarrow L-R-K$

$f'(1{,}15)\approx 61{,}58$

Nach 1,15 Stunden war die Zunahme mit 61,58 Autos/Stunde am größten.

d) $f(t)=35$

$35=-5t^4+40t^2+80 \mid -35$

$0=-5t^4+40t^2+45$

$t^2=z$

$0=-5z^2+40z+45$

ermitteln mit TR:

$z_1=9$ und $z_2=-1$

$z=t^2$

$t^2=9 \mid \sqrt{\ }$ $t^2=-1 \mid \sqrt{\ }$

$t_1=3$ und $t_2=-3\notin D$ $t_{3/4}=$ n.l.

17 Uhr Beginn mit t = 0 plus 3 Stunden = 20 Uhr

Um 20 Uhr waren 35 Autos am Parkplatz.

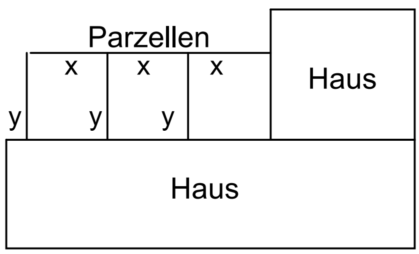
2. Aufgabe

1. HB $A=3x\cdot y$ Eine Parzelle hat die Länge x und die Breite y.

2. NB $42=3x+3y$

$42-3x=3y$

$y=14-x$



3. $A(x) = 3x \cdot (14 - x)$

$A(x) = -3x^2 + 42x$ **Zielfunktion**

4. $A'(x) = -6x + 42$

$A''(x) = -6$

$A'(x_E) = 0$

$0 = -6x + 42$

$x_E = 7$

$A'(x_E) = 0 \wedge A''(x_E) \neq 0$

$A''(7) = -6 < 0 \Rightarrow$ Max.

$A(7) = 147$

$y = 14 - 7$

$y = 7$

Die Parzellen sind 7 m lang und 7 m breit und die maximale Gesamtfläche beträgt 147 m².

3. Aufgabe

1. HB $A = \frac{1}{2} x \cdot y$ Ein Dreieck in dieser Form ist die Hälfte eines Rechtecks.

2. NB $f(x) = -0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 2$

3. $A(x) = \frac{1}{2} x \cdot (-0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 2)$

$A(x) = -0{,}25x^4 - 0{,}75x^3 + x$ **Zielfunktion**

4. $A'(x) = -x^3 - 2{,}25x^2 + 1$

$A''(x) = -3x^2 - 4{,}5x$

$A'(x_E) = 0$

$0 = -x^3 - 2{,}25x^2 + 1 \,|\, : (-1)$

$0 = x^3 + 2{,}25x^2 - 1$

Polynomdivision mit $x_{E1} = -2 \notin D$ liefert $0 = x^2 + 0{,}25x - 0{,}5$

p-q ergibt $x_{E2} \approx 0{,}59$ und $x_3 \approx -0{,}84 \notin D$

Das Dreieck befindet sich rechts von der y-Achse, also im positiven x-Werte Bereich.

$A'(x_E) = 0 \wedge A''(x_E) \neq 0$

$A''(0{,}59) \approx -3{,}70 < 0 \Rightarrow$ Max.

$A(0{,}59) \approx 0{,}41$

$f(0{,}59) \approx 1{,}38$ y-Wert

Das Dreieck ist 0,59 LE breit und 1,38 LE hoch und besitzt einen maximalen Flächeninhalt von 0,41 FE.

4. Aufgabe

$f_k(x) = x^2 + kx - k \quad (k \in R)$

a) $f_2(x) = x^2 + 2x - 2 \qquad S_y(0|-2)$

$f_2(x_N) = 0$

$0 = x^2 + 2x - 2$

$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+2}$

$x_1 \approx 0{,}73$ und $x_2 \approx -2{,}73$

$S_{x1}(0{,}73|0) \quad S_{x2}(-2{,}73|0)$

$f_2'(x) = 2x + 2$

$f_2''(x) = 2$

$f_2'(x_E) = 0$

$0 = 2x + 2$

$x_E = -1$

$f_2'(x_E) = 0 \wedge f_2''(x_E) \neq 0$

$f_2''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow T$

$f_2(-1) = -3$

$T(-1|-3)$

b) $f_{-2}(x) = x^2 - 2x + 2 \qquad S_y(0|2)$

$f_{-2}(x_N) = 0$

$0 = x^2 - 2x + 2$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-2}$

$x_{1/2} =$ n.l.

keine Schnittpunkte mit der x-Achse

$f_{-2}'(x) = 2x - 2$

$f_{-2}''(x) = 2$

$f_{-2}'(x_E) = 0$

$0 = 2x - 2$

$x_E = 1$

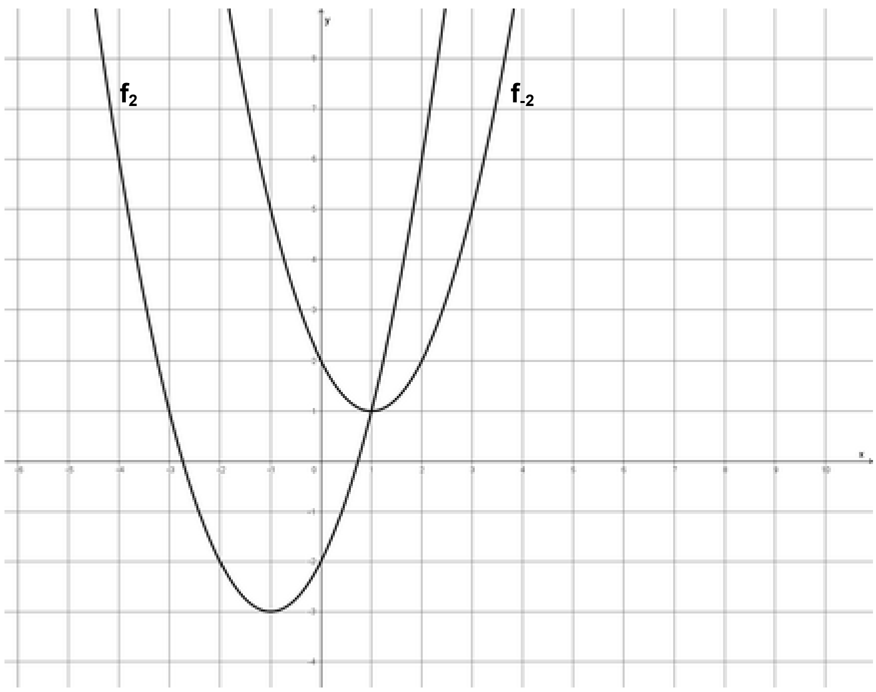
$f_{-2}'(x_E) = 0 \wedge f_{-2}''(x_E) \neq 0$

$f_{-2}''(1) = 2 > 0 \Rightarrow T$

$f_{-2}(1) = 1$

$T(1|1)$

c)



d) $f_k(x) = x^2 + kx - k$

$f_k(x_N) = 0$

$0 = x^2 + kx - k$

$$x_{1/2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + k}$$

$$x_1 = -\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + k}$$

$$x_2 = -\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} + k}$$

Fallunterscheidung!
Die Diskriminante unter der Wurzel entscheidet, ob die Parabel zwei oder eine oder keine Nullstellen besitzt.

1. $\frac{k^2}{4}+k=0 \,|\cdot 4$

$k^2+4k=0$

$k(k+4)=0$

$k_1=0$ und $k_2=-4$

Wird der Wert unter der Wurzel null, so gibt es nur eine Lösung und somit nur eine Nullstelle.
Dies ist bei den Werten 0 und -4 für k der Fall.
$f_0(x)=x^2$ und $f_{-4}(x)=x^2-4x+4$

2. $\frac{k^2}{4}+k>0$

$k<-4$ oder $k>0$

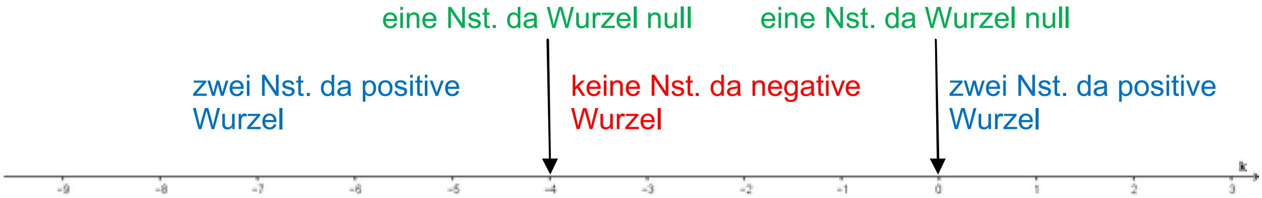
Wird der Wert unter der Wurzel positiv, so gibt es zwei Lösungen und somit zwei Nullstellen.

3. $\frac{k^2}{4}+k<0$

$-4<k<0$

Wird der Wert unter der Wurzel negativ, so gibt es keine Lösung und somit keine Nullstellen.

Darstellung am Zahlenstrahl:



e) $f_k(x)=x^2+kx-k$

$f_k(1)=1^2+k\cdot 1-k$

$f_k(1)=1$

Der Punkt $P(1|1)$ liegt auf allen Graphen der Funktionenschar.