Lösungen O 17

1. Aufgabe

Hier macht man am besten eine Differenzrechnung.
Man berechnet zuerst die Fläche von f(x) mit der x-Achse im ersten Quadranten, dann die Fläche von g(x) mit der x-Achse, und als Differenz erhält man die gesuchte, schraffierte Fläche.
Für die Berechnung der Fläche unter f(x) und g(x) benötigt man die Nullstellen als Grenze.

$f(x_N) = 0$
$0 = -x^3 + 2x^2 + 13x + 10$
TR: $x_{N1} = -1$
$x_{N2} = 5$
$x_{N3} = -2$

$g(x_N) = 0$
$0 = -2x + 4$
$x_N = 2$

$$A_1 = \int_0^5 (-x^3 + 2x^2 + 13x + 10)dx$$
$$A_1 = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{13}{2}x^2 + 10x\right]_0^5$$
$$A_1 = \left[\frac{1675}{12}\right] - [0]$$
$$A_1 = \frac{1675}{12}FE$$

$$A_2 = \int_0^2 (-2x + 4)dx$$
$$A_2 = \left[-x^2 + 4x\right]_0^2$$
$$A_2 = [4] - [0]$$
$$A_2 = 4FE$$

$$A = A_1 - A_2 = \frac{1675}{12} - 4 = \frac{1627}{12}FE$$

2. Aufgabe

Auch hier kommt man am besten durch eine Differenzrechnung zum Ergebnis.
Erst die Gesamtfläche zwischen beiden Funktionen im Intervall $x \in [0;3]$ bestimmen.
Dann die Fläche von g(x) unterhalb der x-Achse ermitteln und zuletzt die Differenz berechnen.

$d(x) = 0{,}5x^3 - 4x^2 + 8x - (0{,}1x^3 - 0{,}4x)$
$d(x) = 0{,}5x^3 - 4x^2 + 8x - 0{,}1x^3 + 0{,}4x$
$d(x) = 0{,}4x^3 - 4x^2 + 8{,}4x$

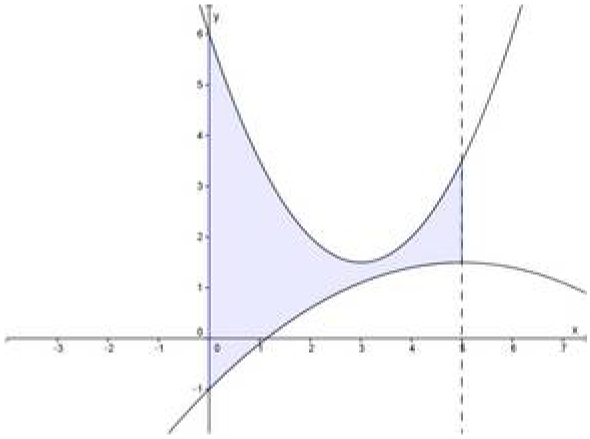
$$A_1 = \int_0^3 (0{,}4x^3 - 4x^2 + 8{,}4x)dx$$
$$A_1 = \frac{99}{10}FE$$

$g(x) = 0$
$0 = 0{,}1x^3 - 0{,}4x$
TR: $x_{N1} = -2$
$x_{N2} = 0$
$x_{N3} = 2$

$$A_2 = \left|\int_0^2 (0{,}1x^3 - 0{,}4x)dx\right|$$
$$A_2 = \left|-\frac{2}{5}\right|$$
$$A_2 = \frac{2}{5}FE$$

$$A = A_1 - A_2 = \frac{99}{10} - \frac{2}{5} = \frac{19}{2}FE$$

3. Aufgabe



Die von beiden Funktionen begrenzte Fläche ist die Fläche zwischen den beiden Funktionen.
Die Grenzen werden durch das Intervall festgelegt.
Die Funktion zum Aufleiten bildet sich aus der Differenz der beiden Funktionen.

$$d(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6 - (-\frac{1}{10}x^2 + x - 1)$$
$$d(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6 + \frac{1}{10}x^2 - x + 1$$
$$d(x) = \frac{3}{5}x^2 - 4x + 7$$

Achtet man darauf, dass man die obere Funktion minus die untere Funktion rechnet, erhält man dadurch einen positiven Wert und somit sind keine Betragstriche nötigt.

$$A = \int_0^5 (\frac{3}{5}x^2 - 4x + 7)dx$$
$$A = 10FE$$

4. Aufgabe

a) Es handelt sich um eine quadratische Funktion, die achsensymmetrisch ist.

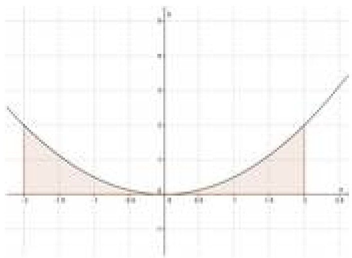
$$f(x) = ax^2 + b$$

Aus der Zeichnung lassen sich folgende Angaben ablesen:

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$S(0\|0)$	$f(0) = 0$	I $0 = b$
$P(2\|2)$	$f(2) = 2$	II $2 = 4a + b$

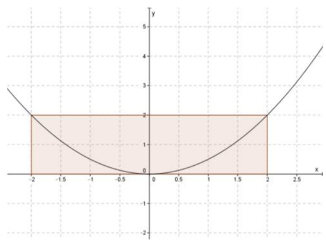
Einsetzen der Variable b ergibt: $2 = 4a \quad \Rightarrow a = 0,5$

$$f(x) = 0,5x^2$$



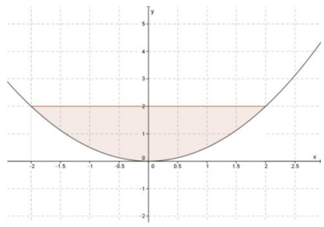
b) Mithilfe der Integralrechnung erhält man nur die Fläche unterhalb der Funktion (zwischen Funktion und x-Achse).

$$A = \int_{-2}^{2} (0,5x^2)dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{4}{3}\right] - \left[-\frac{4}{3}\right] = \frac{8}{3}FE$$



Um die Fläche in der Parabel zu ermitteln, muss man das Rechteck berechnen, das die Parabel umgibt.

$$A = 4 \cdot 2 = 8FE$$



Durch Differenzrechnung erhält man die Fläche in der Parabel (Dachrinne).

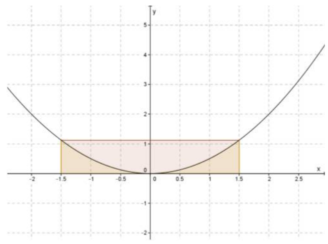
$$A = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}FE$$

Umrechnung der FE in cm²:
Breite Dachrinne = 20 cm
Breite der Parabel im Koordinatensystem = 4 LE => 1 LE = 5 cm => 1 FE = 25 cm²

Die Querschnittsfläche der Dachrinne beträgt $A = \frac{16}{3} \cdot 25 \approx 133{,}33\text{cm}^2$

Das Volumen der Dachrinne beträgt
$V = 133{,}33 \cdot 800 = 106664\text{cm}^3 = 106{,}664\text{dm}^3 \approx 106{,}66\text{Liter}$.

c) Die Höhe muss auf LE umgerechnet werden.
$y = 5{,}6 : 5 = 1{,}12\text{LE}$ (da 1 LE = 5 cm)



Um nun erneut das Volumen bestimmen zu können, benötigt man die x-Werte (Breite) des Wassers in der Dachrinne. $f(x) = 1{,}12$

$1{,}12 = 0{,}5x^2 \,|:0{,}5\,|\sqrt{}$

$\pm 1{,}5 \approx x_{1/2}$

$A = \int_{-1{,}5}^{1{,}5} (0{,}5x^2)dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-1{,}5}^{1{,}5} = \left[\frac{9}{16}\right] - \left[-\frac{9}{16}\right] = \frac{9}{8}\text{FE}$ (unterhalb der Funktion)

$A = 3 \cdot 1{,}12 = 3{,}36\text{FE}$ (Rechteck)

$A = 3{,}36 - \frac{9}{8} = \frac{447}{200}\text{FE}$ (in der Parabel)

$A = \frac{447}{200} \cdot 25 \approx 55{,}88\text{cm}^2$

$V = 55{,}88 \cdot 800 = 44704\text{cm}^3 \approx 44{,}70\text{dm}^3 = 44{,}7\text{Liter}$

Das Volumen des Wassers beträgt nun 44,7 Liter.