Lösungen O 16

Aufgabe 1

a) $p(x) = E(x) : x$ $\quad x = 28{,}4$

$p(x) = -5x + 142$ $\quad \Rightarrow D_{ök}\,[0;28{,}4]$

$p(x) = 0$

$0 = -5x + 142$

Der ökonomische Definitionsbereich liegt zwischen 0 und 28,4 ME.

b) $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -5x^2 + 142x - (1{,}5x^3 - 23x^2 + 140x + 64)$

$G(x) = -5x^2 + 142x - 1{,}5x^3 + 23x^2 - 140x - 64$

$G(x) = -1{,}5x^3 + 18x^2 + 2x - 64$

$G(x) = 0 \quad => \quad 0 = -1{,}5x^3 + 18x^2 + 2x - 64$

Hier sollte man nicht durch (-1,5) dividieren, da Brüche entstehen.

Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt $0 = -1{,}5x^2 + 15x + 32$

p-q liefert $x_2 = 11{,}8$ und $x_3 = -1{,}8 \notin D_{ök}$

Die Gewinnschwelle GS liegt bei 2 ME, die Gewinngrenze GG bei 11,8 ME.

c) gewinnmaximale Ausbringungsmenge $x_{G\max}$ mit

$G'(x) = -4{,}5x^2 + 36x + 2$ $\quad 0 = x^2 - 8x - \frac{4}{9}$

$G''(x) = -9x + 36$ $\quad$ p-q liefert $x_1 = 8{,}1$ und $x_2 = -0{,}1 \notin D_{ök}$

$G'(x) = 0$ $\quad G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$0 = -4{,}5x^2 + 36x + 2 \,|: (-4{,}5)$ $\quad G''(8{,}1) = -36{,}9 < 0 \Rightarrow$ Max. $\quad x_{G\max}$

$G(8{,}1) = 336{,}0GE$

Die gewinnmaximale Menge beträgt 8,1 ME, der zugehörige Gewinn (Gmax) 336,0 GE.

d) $C(x_{G\max} | p(x_{G\max}))$ $\quad p(8{,}1) = 101{,}5$ $\quad C(8{,}1|101{,}5)$

Bei 8,1 ME muss man pro ME einen Preis von 101,5 GE verlangen, um den maximalen Gewinn zu erzielen. Der Cournot'sche Punkt gibt die gewinnmaximale Menge und den zugehörigen Preis an.

Aufgabe 2

a) $G(x) = -x^3 + 7x^2 + 4x - 10$ und $K(x) = x^3 - 8x^2 + 21x + 10$

$E(x) = G(x) + K(x)$ Funktionen einsetzen und zusammenfassen

$E(x) = -x^2 + 25x$

$p(x) = -x + 25$ mit $p(x) = 0 \Rightarrow x = 25$ ME (SM) $\Rightarrow D_{ök} = [0;25]$

b) $G(x) = -x^3 + 7x^2 + 4x - 10$

$G'(x) = -3x^2 + 14x + 4$

$G''(x) = -6x + 14$

$G'(x) = 0$ $\quad G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$0 = -3x^2 + 14x + 4 \,|: (-3)$ $\quad f''(4{,}9) = -15{,}4 < 0 \Rightarrow$ Max.

$0 = x^2 - \frac{14}{3}x - \frac{4}{3}$

$x_{1/2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}}$

$x_1 = 4{,}9 \ \lor \ x_2 = -0{,}3 \notin D_{ök}$

$p(4{,}9) = 20{,}1 \quad \Rightarrow C(4{,}9|20{,}1)$

Bei 4,9 ME und einem Preis von 20,1 GE pro ME erzielt man maximalen Gewinn.

c) $G(x) = 0$

$0 = -x^3 + 7x^2 + 4x - 10 \,|\, : (-1)$

$0 = x^3 - 7x^2 - 4x + 10$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ führt zu

$0 = x^2 - 6x - 10$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 7{,}4$ und $x_3 = -1{,}4 \notin D_{ök}$

Die Gewinngrenze liegt bei 7,4 ME.

d) $E'(x) = 0$

$E'(x) = -2x + 25$

$E''(x) = -2$

$E'(x) = 0$ $E'(x) = 0 \land E''(x) \neq 0$

$x = 12{,}5$ $E''(12{,}5) = -2 < 0 \Rightarrow$ Max.

Nein, das Erlösmaximum wird mit 12,5 ME erreicht.

Aufgabe 3

a) $E(x) = ax^2 + 144x$ und $P(6|432)$ einsetzen

$432 = a \cdot 6^2 + 144 \cdot 6 \quad \Rightarrow a = -12$ und somit $E(x) = -12x^2 + 144x$

b) $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -12x^2 + 144x - (x^3 - 10x^2 + 56x + 100)$

$G(x) = -x^3 - 2x^2 + 88x - 100$

$G'(x) = -3x^2 - 4x + 88$

$G''(x) = -6x - 4$

$G'(x) = 0$

mit p-q-Formel ergibt sich $x_1 = 4{,}8$ und $x_2 = -6{,}1 \notin D_{ök}$

$G'(x) = 0 \land G''(x) \neq 0$

$G''(4{,}8) = -32{,}8 < 0 \Rightarrow$ Max.

$G(4{,}8) = 165{,}7\text{GE}$

Das Gewinnmaximum liegt bei 165,7 GE.

c) $p(x) = -12x + 144$

$p(4{,}8) = 86{,}4\text{GE}$

Der Cournot'sche Punkt liegt bei $C(4{,}8|86{,}4)$. Man muss 86,4 GE pro ME verlangen.

d) $E(x) = 60x$

$K(x) = x^3 - 10x^2 + 56x + 50$!!!

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 60x - (x^3 - 10x^2 + 56x + 50)$

$G(x) = -x^3 + 10x^2 + 4x - 50$

$G'(x) = -3x^2 + 20x + 4$

$G''(x) = -6x + 20$

$G'(x) = 0$

mit p-q-Formel ergibt sich $x_1 = 6{,}9$ und $x_2 = -0{,}2 \notin D_{ök}$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(6{,}9) = -21{,}4 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$G(6{,}9) = 125{,}2 GE$

Der maximale Gewinn kann nicht gehalten werden, er liegt nur noch bei 125,2 GE.

Aufgabe 4

$p(x) = 5$

$E(x) = 5x$

Über den Gewinn wird folgendes ausgesagt: $P_1(2|0)$ und $P_2(3|2{,}5)$ $K_{fix} = 8$

$G(x) = ax^2 + bx + c$ Die Konstante beträgt $c = -8$, da fixe Kosten vom Gewinn abgezogen werden müssen.

$G(x) = ax^2 + bx - 8$

Setzt man die beiden Punkte ein, erhält man folgendes Gleichungssystem

I $0 = 4a + 2b - 8$ Stellt man die Gleichungen um und löst, so erhält man

II $2{,}5 = 9a + 3b - 8$ $a = -0{,}5$ und $b = 5$ $\Rightarrow G(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 8$

Aus $G(x) = E(x) - K(x)$ bzw. $K(x) = E(x) - G(x)$ erhält man die Kostenfunktion mit

$K(x) = 0{,}5x^2 + 8$