Lösungen O 15

1. Aufgabe

a) $p(x) = -7x + 79$

$E(x) = -7x^2 + 79x$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -7x^2 + 79x - (x^3 - 15x^2 + 75x + 32)$

$G(x) = -x^3 + 8x^2 + 4x - 32$

$G(x) = 0$

$0 = -x^3 + 8x^2 + 4x - 32 \,|: (-1)$

$0 = x^3 - 8x^2 - 4x + 32$

Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt $0 = x^2 - 6x - 16$

p-q ergibt $x_2 = 8$ und $x_3 = -2 \notin D_{ök}$

Die Gewinnschwelle liegt bei 2 ME und die Gewinngrenze bei 8 ME.

b) $G'(x) = -3x^2 + 16x + 4$

$G''(x) = -6x + 16$

$G'(x) = 0$

$0 = -3x^2 + 16x + 4 \,|: (-3)$

$0 = x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{4}{3}$

p-q liefert $x_1 = 5{,}6$ und $x_2 = -0{,}2 \notin D_{ök}$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(5{,}6) = -17{,}6 < 0 \Rightarrow$ Max. $x_{G\max}$

Cournot'scher Punkt

$C(x_{G\max} | p(x_{G\max}))$ gewinnmaximale Menge und zugehöriger Preis

$p(5{,}6) = 39{,}8$

$C(5{,}6 | 39{,}8)$ Bei 5,6 ME und einem Preis von 39,8 GE pro ME wird der maximale Gewinn erzielt.

c) $K'(x) = 3x^2 - 30x + 75$

$K''(x) = 6x - 30$

$K'''(x) = 6$

Grenzkostenminimum

$K''(x) = 0$

$0 = 6x - 30$

$x = 5$

$K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$

$K'''(5) = 6 > 0 \Rightarrow$ Min.

$K'(5) = 0$

$GK_{\min}(5|0)$

Bei 5 ME liegt die geringste Kostensteigung von 0 GE vor.
Ändert man die Produktionsmenge um eine sehr kleine Einheit, so steigen die Kosten (fast) nicht.

d) kleinster Preis = KPU

$k_v(x) = x^2 - 15x + 75$

$k_v'(x) = 2x - 15$ und $k_v''(x) = 2$

$k_v'(x) = 0$

$0 = 2x - 15$

$x = 7{,}5$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$k''(7{,}5) = 2 > 0 \Rightarrow$ Min.

$k_v(7{,}5) = 18{,}75$

Den kleinsten Preis von 18,75 GE kann der Betrieb bei einer Produktion von 7,5 ME anbieten.

2. Aufgabe

a) $p(x) = E(x) : x$

$p(x) = -5x + 142$

$p(x) = 0$

$0 = -5x + 142$

$x = 28{,}4$

$\Rightarrow D_{ök}[0;28{,}4]$

Der ökonomische Definitionsbereich liegt zwischen 0 und 28,4 ME.

b) $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -5x^2 + 142x - (1{,}5x^3 - 23x^2 + 140x + 64)$

$G(x) = -5x^2 + 142x - 1{,}5x^3 + 23x^2 - 140x - 64$

$G(x) = -1{,}5x^3 + 18x^2 + 2x - 64$

$G(x) = 0$

$0 = -1{,}5x^3 + 18x^2 + 2x - 64$ Hier sollte man nicht durch (-1,5) dividieren, da Brüche entstehen.

Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt $0 = -1{,}5x^2 + 15x + 32$

p-q liefert $x_2 = 11{,}8$ und $x_3 = -1{,}8 \notin D_{ök}$

Die Gewinnschwelle GS liegt bei 2 ME, die Gewinngrenze GG bei 11,8 ME.

c) gewinnmaximale Ausbringungsmenge $x_{G\max}$ mit

$G'(x) = -4{,}5x^2 + 36x + 2$ $\qquad 0 = x^2 - 8x - \frac{4}{9}$

$G''(x) = -9x + 36$ $\qquad$ p-q liefert $x_1 = 8{,}1$ und $x_2 = -0{,}1 \notin D_{ök}$

$G'(x) = 0$ $\qquad G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$0 = -4{,}5x^2 + 36x + 2 \,|\, : (-4{,}5)$ $\qquad G''(8{,}1) = -36{,}9 < 0 \Rightarrow$ Max. $\quad x_{G\max}$

$G(8{,}1) = 336{,}0\,GE$

Die gewinnmaximale Menge beträgt 8,1 ME, der zugehörige Gewinn (Gewinnmaximum) 336,0 GE.

d) $C\left(x_{G\max} \middle| p(x_{G\max})\right)$ $\qquad p(8{,}1) = 101{,}5$ $\qquad C(8{,}1|101{,}5)$

Bei 8,1 ME muss man pro ME einen Preis von 101,5 GE verlangen, um den maximalen Gewinn zu erzielen. Der Cournot'sche Punkt gibt die gewinnmaximale Menge und den zugehörigen Preis an.

e) $k(x) = 1{,}5x^2 - 23x + 140 + \frac{64}{x}$

$k'(x) = 3x - 23 - \frac{64}{x^2}$ und $k''(x) = 3 + \frac{128}{x^3}$

$k'(x) = 0$

$0 = 3x - 23 - \frac{64}{x^2} \,\Big|\cdot x^2$ $\qquad$ Polynomdivision mit $x_1 = 8$ ergibt $0 = 3x^2 + x + 8$

$0 = 3x^3 - 23x^2 - 64$

Teilt man durch 3 und setzt in die p-q-Formel ein, ergibt sich eine negative Wurzel. Somit existieren keine weiteren Lösungen für x.

$k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$

$k''(8) = 3{,}25 > 0 \Rightarrow$ Min. $\qquad$ BO = 8 ME

$k(8) = 60$ $\qquad$ LPU = 60 GE

Die langfristige Preisuntergrenze liegt bei einer Produktion von 8 ME bei 60 GE. Der Unternehmer erzielt keinen Gewinn, er kann also keine Rücklagen für Investitionen bilden. Das führt auf Dauer zum Untergang des Unternehmens.

3. Aufgabe

a) $E(x) = -4x^2 + 102x$ $\qquad p(x) = E(x) : x$

$p(x) = -4x + 102$ $\qquad$ Der Höchstpreis liegt bei 102 GE.

$p(x) = 0$

$0 = -4x + 102$

$x = 25{,}5$ $\qquad$ Die Sättigungsmenge wird bei 25,5 ME erreicht.

b) $E'(x) = -8x + 102$ $\quad 0 = -8x + 102$ $\quad E'(x) = 0 \wedge E''(x) \neq 0$

$E''(x) = -8$ $\quad x = 12{,}75$ $\quad E''(12{,}75) = -8 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$E'(x) = 0$ $\quad E(12{,}75) = 650{,}25$

Das Erlösmaximum von 650,25 GE wird mit 12,75 ME erreicht.

c) $G(x) = -0{,}5x^3 + 130x - 256$ $\quad G(x) = 0$

$0 = -0{,}5x^3 + 130x - 256 \,|: (-0{,}5)$ $\quad$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt $0 = x^2 + 2x - 256$

$0 = x^3 + 0x^2 - 260x + 512$

p-q liefert $x_2 = 15$ und $x_3 = -17 \notin D_{ök}$

Die GS liegt bei 2 ME, Die GG bei 15 ME.

d) $G'(x) = -1{,}5x^2 + 130$ $\quad G'(x) = 0$ $\quad 0 = x^2 - 86{,}7 \,|+ 86{,}7$

$G''(x) = -3x$ $\quad 0 = -1{,}5x^2 + 130 \,|: (-1{,}5)$ $\quad x^2 = 86{,}7 \,|\sqrt{\ }$

$x_1 = 9{,}3$ und $x_2 = -9{,}3 \notin D_{ök}$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(9{,}3) = -27{,}9 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$ $\quad G(9{,}3) = 550{,}8$

Das Gewinnmaximum beträgt 550,8 GE und wird mit 9,3 ME erreicht.

e) $p(x) = -4x + 102$

$p(9{,}3) = 64{,}8$ $\quad C(9{,}3|64{,}8)$

Bei 9,3 ME und einem Preis von 64,8 GE pro Mengeneinheit macht man den maximalen Gewinn.

f) $G(x) = E(x) - K(x)$ $\quad$ => $\quad K(x) = E(x) - G(x)$

$K(x) = -4x^2 + 102x - (-0{,}5x^3 + 130x - 256)$

Klammer auflösen und zusammenfassen ergibt $K(x) = 0{,}5x^3 - 4x^2 - 28x + 256$

$K'(x) = 1{,}5x^2 - 8x - 28$

$K'(8) = 4$ $\quad$ Bei 8 ME liegen die Grenzkosten bei 4 GE.

g) $K(x) = 0{,}5x^3 - 4x^2 - 28x + 256$ $\quad$ => $\quad k_v(x) = 0{,}5x^2 - 4x - 28$

$24{,}5 = 0{,}5x^2 - 4x - 28 \,|- 24{,}5$

$0 = 0{,}5x^2 - 4x - 52{,}5 \,|: 0{,}5$ $\quad$ p-q liefert $x_1 = 15$ und $x_2 = -7 \notin D_{ök}$

$0 = x^2 - 8x - 105$

Bei 15 ME entstehen variable Stückkosten von 24,5 GE.

4. Aufgabe

a) $K'(x) = 15x^2 - 120x + 250$

$K''(x) = 30x - 120$

$K'''(x) = 30$

$K''(x) = 0$

$0 = 30x - 120$ $\quad K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$ $\quad K'(4) = 10$ $\quad GK_{min}(4|10)$

$x = 4$ $\quad K'''(4) = 30 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

Bei 4 ME liegt die geringste Kostensteigerung mit 10 GE vor.

b) $k(x) = 5x^2 - 60x + 250 + \frac{200}{x}$

$170 = 5x^2 - 60x + 250 + \frac{200}{x} \mid \cdot x$

$170x = 5x^3 - 60x^2 + 250x + 200 \mid -170x$

$0 = 5x^3 - 60x^2 + 80x + 200 \mid : 5$

$0 = x^3 - 12x^2 + 16x + 40$ Polynomdivision mit $x_1 = 10$ ergibt $0 = x^2 - 2x - 4$

p-q liefert $x_2 = 3{,}2$ und $x_3 = -1{,}2 \notin D_{ök}$

Stückkosten von 170 GE fallen bei 3,2 ME und 10 ME an.

c) $k_v(x) = 5x^2 - 60x + 250$

$k_v'(x) = 10x - 60$

$k_v''(x) = 10$

$k_v'(x) = 0$

$0 = 10x - 60$

$x = 6$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$k_v''(6) = 10 > 0 \Rightarrow$ Max.

$k_v(6) = 70$

Der niedrigste Preis kann bei 6 ME mit 70 GE angesetzt werden. Dabei macht man den Verlust der fixen Kosten von 200 GE.

d) $p(x) = 250$ $G(x) = E(x) - K(x)$

$E(x) = 250x$ $G(x) = 250x - (5x^3 - 60x^2 + 250x + 200)$

$G(x) = -5x^3 + 60x^2 - 200$

Kein Antwortsatz nötig.

e) $G'(x) = -15x^2 + 120x$

$G''(x) = -30x + 120$

$G'(x) = 0$

$0 = -15x^2 + 120x \mid : (-15)$

$0 = x^2 - 8x$ x ausklammern ergibt $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(0) = 120 > 0 \Rightarrow$ Min.

$G''(8) = -120 < 0 \Rightarrow$ Max. $G(8) = 1080$

Das Gewinnmaximum liegt bei 1080 GE und wird mit 8 ME erreicht.

f) $E(x) = K(x)$ oder $G(x) = 0$

$0 = -5x^3 + 60x^2 - 200 \mid : (-5)$

$0 = x^3 - 12x^2 + 40$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt $0 = x^2 - 10x - 20$

p-q liefert $x_2 = 11{,}7$ und $x_3 = -1{,}7 \notin D_{ök}$

Bei 2 ME und bei 11,7 ME werden die Kosten vom Erlös genau gedeckt.