

Lösungen O 14

1. Aufgabe

a) $p(x) = -7x + 79$

$$E(x) = -7x^2 + 79x$$

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$G(x) = -7x^2 + 79x - (x^3 - 15x^2 + 75x + 32)$$

$$G(x) = -x^3 + 8x^2 + 4x - 32$$

$$G(x) = 0$$

$$0 = -x^3 + 8x^2 + 4x - 32 \quad | :(-1)$$

$$0 = x^3 - 8x^2 - 4x + 32$$

Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt $0 = x^2 - 6x - 16$

p-q ergibt $x_2 = 8$ und $[x_3 = -2]$

Die Gewinnschwelle liegt bei 2 ME und die Gewinngrenze bei 8 ME.

b) $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$$0 = -3x^2 + 16x + 4 \quad | :(-3)$$

$$G'(x) = -3x^2 + 16x + 4$$

$$0 = x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$G''(x) = -6x + 16$$

p-q liefert $x_1 = 5,6$ und $[x_2 = -0,2]$

$$G''(5,6) = -17,6 < 0 \Rightarrow \text{Max. } x_{G \max}$$

Cournot'scher Punkt

$C(x_{G \max} | p(x_{G \max}))$ gewinnmaximale Menge und zugehöriger Preis

$$p(5,6) = 39,8$$

$C(5,6 | 39,8)$ Bei 5,6 ME und einem Preis von 39,8 GE pro ME wird der maximale Gewinn erzielt.

c) $K'(x) = 3x^2 - 30x + 75$

Grenzkostenminimum

$$K'''(5) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

$$K''(x) = 6x - 30$$

$$K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$$

$$K'''(x) = 6$$

$$0 = 6x - 30$$

$$K'(5) = 0$$

$$x = 5$$

$$GK_{\min}(5 | 0)$$

Bei 5 ME liegt die geringste Kostensteigerung von 0 GE vor.

Ändert man die Produktionsmenge um eine sehr kleine Einheit, so steigen die Kosten (fast) nicht.

d) kleinster Preis = KPU

$$k_v(x) = x^2 - 15x + 75$$

$$k_v'(x) = 2x - 15 \quad \text{und} \quad k_v''(x) = 2$$

$$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$$

$$0 = 2x - 15$$

$$k''(7,5) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.} \quad k_v(7,5) = 18,75$$

$$x = 7,5$$

Den kleinsten Preis von 18,75 GE kann der Betrieb bei einer Produktion von 7,5 ME anbieten.

2. Aufgabe

a) $p(x) = E(x) : x$

$$x = 28,4$$

$$p(x) = -5x + 142$$

$$\Rightarrow D_{\text{ök}}[0; 28,4]$$

$$p(x) = 0$$

$$0 = -5x + 142$$

Der ökonomische Definitionsbereich liegt zwischen 0 und 28,4 ME.

b) $G(x) = E(x) - K(x)$

$$G(x) = -5x^2 + 142x - (1,5x^3 - 23x^2 + 140x + 64)$$

$$G(x) = -5x^2 + 142x - 1,5x^3 + 23x^2 - 140x - 64$$

$$G(x) = -1,5x^3 + 18x^2 + 2x - 64$$

$$G(x) = 0$$

$0 = -1,5x^3 + 18x^2 + 2x - 64$ Hier sollte man nicht durch (-1,5) dividieren, da Brüche entstehen.

Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt $0 = -1,5x^2 + 15x + 32$

$$\text{p-q liefert } x_2 = 11,8 \text{ und } [x_3 = -1,8]$$

Die Gewinnschwelle GS liegt bei 2 ME, die Gewinngrenze GG bei 11,8 ME.

c) gewinnmaximale Ausbringungsmenge $x_{G \max}$ mit

$$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0 \quad 0 = -4,5x^2 + 36x + 2 \mid : (-4,5)$$

$$G'(x) = -4,5x^2 + 36x + 2 \quad 0 = x^2 - 8x - \frac{4}{9}$$

$$G''(x) = -9x + 36 \quad \text{p-q liefert } x_1 = 8,1 \text{ und } [x_3 = -0,1]$$

$$G''(8,1) = -36,9 < 0 \Rightarrow \text{Max. } x_{G \max}$$

$$G(8,1) = 336,0 \text{GE}$$

Die gewinnmaximale Menge beträgt 8,1 ME, der zugehörige Gewinn (Gewinnmaximum) 336,0 GE.

d) $C(x_{G \max} | p(x_{G \max})) \quad p(8,1) = 101,5 \quad C(8,1 | 101,5)$

Bei 8,1 ME muss man pro ME einen Preis von 101,5 GE verlangen, um den maximalen Gewinn zu erzielen. Der Cournot'sche Punkt gibt die gewinnmaximale Menge und den zugehörigen Preis an.

e) $k(x) = 1,5x^2 - 23x + 140 + \frac{64}{x}$

$$k'(x) = 3x - 23 - \frac{64}{x^2} \quad \text{und} \quad k''(x) = 3 + \frac{128}{x^3}$$

$$k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$$

$$0 = 3x - 23 - \frac{64}{x^2} \mid \cdot x^2$$

Polynomdivision mit $x_1 = 8$ ergibt $0 = 3x^2 + x + 8$

$$0 = 3x^3 - 23x^2 - 64$$

Teilt man durch 3 und setzt in die p-q-Formel ein, ergibt sich eine negative Wurzel. Somit existieren keine weiteren Lösungen für x.

$$k''(8) = 3,25 > 0 \Rightarrow \text{Min.} \quad \text{BO} = 8 \text{ ME}$$

$$k(8) = 60 \quad \text{LPU} = 60 \text{ GE}$$

Die langfristige Preisuntergrenze liegt bei einer Produktion von 8 ME bei 60 GE. Der Unternehmer erzielt keinen Gewinn, er kann also keine Rücklagen für Investitionen bilden. Das führt auf Dauer zum Untergang des Unternehmens.

3. Aufgabe

a) $E(x) = -4x^2 + 102x \quad p(x) = E(x) : x$

$$p(x) = -4x + 102 \quad \text{Der Höchstpreis liegt bei 102 GE.}$$

$$p(x) = 0$$

$$0 = -4x + 102$$

$$x = 25,5$$

Die Sättigungsmenge wird bei 25,5 ME erreicht.

b) $E'(x) = -8x + 102$ $E'(x) = 0 \wedge E''(x) \neq 0$
 $E''(x) = -8$
 $0 = -8x + 102$ $E''(12,75) = -8 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$ $E(12,75) = 650,25$
 $x = 12,75$
Das Erlösmaximum von 650,25 GE wird mit 12,75 ME erreicht.

c) $G(x) = -0,5x^3 + 130x - 256$ $G(x) = 0$
 $0 = -0,5x^3 + 130x - 256 \mid : (-0,5)$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt $0 = x^2 + 2x - 256$
 $0 = x^3 + 0x^2 - 260x + 512$ p-q liefert $x_2 = 15$ und $[x_3 = -17]$
Die GS liegt bei 2 ME, Die GG bei 15 ME.

d) $G'(x) = -1,5x^2 + 130$ $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$ $0 = -1,5x^2 + 130 \mid : (-1,5)$
 $G''(x) = -3x$ $0 = x^2 - 86,7 \mid + 86,7$
Wurzel ziehen ergibt $x_1 = 9,3$ und $[x_3 = -9,3]$
 $G''(9,3) = -27,9 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$ $G(9,3) = 550,8$
Das Gewinnmaximum beträgt 550,8 GE und wird mit 9,3 ME erreicht.

e) $p(x) = -4x + 102$
 $p(9,3) = 64,8$ $C(9,3 \mid 64,8)$
Bei 9,3 ME und einem Preis von 64,8 GE pro Mengeneinheit macht man den maximalen Gewinn.

f) $G(x) = E(x) - K(x) \Rightarrow K(x) = E(x) - G(x)$
 $K(x) = -4x^2 + 102x - (-0,5x^3 + 130x - 256)$
Klammer auflösen und zusammenfassen ergibt $K(x) = 0,5x^3 - 4x^2 - 28x + 256$
 $K'(x) = 1,5x^2 - 8x - 28$
 $K'(8) = 4$ Bei 8 ME liegen die Grenzkosten bei 4 GE.

g) $K(x) = 0,5x^3 - 4x^2 - 28x + 256 \Rightarrow k_v(x) = 0,5x^2 - 4x - 28$
 $24,5 = 0,5x^2 - 4x - 28 \mid - 24,5$
 $0 = 0,5x^2 - 4x - 52,5 \mid : 0,5$ p-q liefert $x_1 = 15$ und $[x_2 = -7]$
 $0 = x^2 - 8x - 105$
Bei 15 ME entstehen variable Stückkosten von 24,5 GE.

4. Aufgabe

a) $K'(x) = 15x^2 - 120x + 250$
 $K''(x) = 30x - 120$
 $K'''(x) = 30$
 $K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$
 $0 = 30x - 120$ $K'''(4) = 30 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $K'(4) = 10$ $GK_{\min} (4 \mid 10)$
 $x = 4$
Bei 4 ME liegt die geringste Kostensteigerung mit 10 GE vor.

$$\text{b) } k(x) = 5x^2 - 60x + 250 + \frac{200}{x}$$

$$170 = 5x^2 - 60x + 250 + \frac{200}{x} \quad | \cdot x$$

$$170x = 5x^3 - 60x^2 + 250x + 200 \quad | -170x$$

$$0 = 5x^3 - 60x^2 + 80x + 200 \quad | :5$$

$$0 = x^3 - 12x^2 + 16x + 40 \quad \text{Polynomdivision mit } x_1 = 10 \text{ ergibt } 0 = x^2 - 2x - 4$$

$$\text{p-q liefert } x_2 = 3,2 \text{ und } [x_3 = -1,2]$$

Stückkosten von 170 GE fallen bei 3,2 ME und 10 ME an.

$$\text{c) } k_v(x) = 5x^2 - 60x + 250$$

$$k_v'(x) = 10x - 60$$

$$k_v''(x) = 10$$

$$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$$

$$0 = 10x - 60$$

$$x = 6$$

$$k_v''(6) = 10 > 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

$$k_v(6) = 70$$

Der niedrigste Preis kann bei 6 ME mit 70 GE angesetzt werden. Dabei macht man den Verlust der fixen Kosten von 200 GE.

$$\text{d) } p(x) = 250$$

$$E(x) = 250x$$

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$G(x) = 250x - (5x^3 - 60x^2 + 250x + 200)$$

$$G(x) = -5x^3 + 60x^2 - 200$$

Kein Antwortsatz nötig.

$$\text{e) } G'(x) = -15x^2 + 120x$$

$$G''(x) = -30x + 120$$

$$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$$

$$0 = -15x^2 + 120x \quad | :(-15)$$

$$0 = x^2 - 8x \quad x \text{ ausklammern ergibt } x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 8$$

$$G''(0) = 120 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

$$G(8) = 1080$$

$$G''(8) = -120 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

Das Gewinnmaximum liegt bei 1080 GE und wird mit 8 ME erreicht.

$$\text{f) } E(x) = K(x) \text{ oder } G(x) = 0$$

$$0 = -5x^3 + 60x^2 - 200 \quad | :(-5)$$

$$0 = x^3 - 12x^2 + 40$$

$$\text{Polynomdivision mit } x_1 = 2 \text{ ergibt } 0 = x^2 - 10x - 20$$

$$\text{p-q liefert } x_2 = 11,7 \text{ und } [x_3 = -1,7]$$

Bei 2 ME und bei 11,7 ME werden die Kosten vom Erlös genau gedeckt.