Lösungen O 13

1. Aufgabe

a) $K(x) = x^3 - 10x^2 + 43x + 72$ Gesamtkosten- bzw. Kostenfunktion

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 43$ Grenzkostenfunktion (1. Ableitung)

b) $K'(x) = 3x^2 - 20x + 43$ Grenzkostenminimum $K'''(\frac{10}{3}) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$K''(x) = 6x - 20$ $K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$

$K'''(x) = 6$ $0 = 6x - 20$ $K'(3{,}3) = 9{,}7$

$x = \frac{10}{3}$ $GK_{min}(3{,}3|9{,}7)$

(Das Grenzkostenminimum liegt am Wendepunkt der Kostenfunktion, deshalb benutzt man die zweite und dritte Ableitung, beurteilt aber auf min oder max. Dem x-Wert wird die Steigung zugeordnet, deshalb x einsetzen in die erste Ableitung.)

Allgemein: Das Grenzkostenminimum gibt die Stelle mit der geringsten Kostensteigerung an.
Hier: Bei 3,3 ME liegt die geringste Kostensteigerung mit 9,7 GE vor.

c) $K(x) = x^3 - 10x^2 + 43x + 72$

$k(x)$ = Stückkostenfunktion

$k(x) = \frac{K(x)}{x}$ (Kosten pro Stück)

$k(x) = x^2 - 10x + 43 + \frac{72}{x}$ Stückkostenfunktion

Das Betriebsoptimum BO und die LPU (langfristige Preisuntergrenze) berechnet man als Extrempunkt der Stückkostenfunktion, wobei auch das Betriebsoptimum ein Minimum sein muss. Man benötigt also die ersten beiden Ableitungen.

$k'(x) = 2x - 10 - \frac{72}{x^2}$ und $k''(x) = 2 + \frac{144}{x^3}$

$k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 10 - \frac{72}{x^2} \,\Big|\cdot x^2$ Polynomdivision mit $x_1 = 6$ ergibt $0 = x^2 + x + 6$

$0 = 2x^3 - 10x^2 - 72 \,|: 2$

$0 = x^3 - 5x^2 + 0x - 36$ In der p-q-Formel ergibt sich eine negative Wurzel. Somit existieren keine weiteren Lösungen für x.

$k''(6) = 2{,}7 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ BO = 6 ME

$k(6) = 31$ LPU = 31 GE

Produziert der Unternehmer 6 ME und verkauft jede Mengeneinheit für 31 GE, so deckt er seine gesamten Kosten ab und kann diesen Preis längere Zeit halten. Dabei macht er aber keinen Gewinn und gefährdet auf Dauer die Existenz seines Unternehmens.

d) $K_v(x) = x^3 - 10x^2 + 43x$

$k_v(x)$ = variable Stückkostenfunktion

$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$ (variable Kosten pro Stück)

$k_v(x) = x^2 - 10x + 43$ variable Stückkostenfunktion

Das Betriebsminimum BM und die KPU (kurzfristige Preisuntergrenze) berechnet man als Extrempunkt der variablen Stückkostenfunktion.
Man benötigt also die ersten beiden Ableitungen.

$k_v'(x) = 2x - 10$ und $k_v''(x) = 2$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 10$

$x = 5$

$k''(5) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $k_v(5) = 18$ BM = 5 ME und KPU = 18 GE

Produziert der Unternehmer 5 ME und verkauft jede Mengeneinheit für 18 GE, so deckt er nur seine variablen Kosten ab und kann diesen Preis auch nur ganz kurze Zeit halten.
Beim niedrigsten Preis werden die fixen Kosten nicht gedeckt und fallen als Verlust an.
Hier wäre es ein Verlust von 72 GE.

2. Aufgabe

$K(x) = 0{,}25x^3 - 2x^2 + 6x + 12{,}5$

a) $k(x) = 0{,}25x^2 - 2x + 6 + \frac{12{,}5}{x}$

$k'(x) = 0{,}5x - 2 - \frac{12{,}5}{x^2}$ und $k''(x) = 0{,}5 + \frac{25}{x^3}$

$k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$

$0 = 0{,}5x - 2 - \frac{12{,}5}{x^2} \Big| \cdot x^2$

Polynomdivision mit $x_1 = 5$ ergibt $0 = x^2 + x + 5$

$0 = 0{,}5x^3 - 2x^2 - 12{,}5 \big| : 0{,}5$

$0 = x^3 - 4x^2 + 0x - 25$

In der p-q-Formel ergibt sich eine negative Wurzel. Somit existieren keine weiteren Lösungen für x.

$k''(5) = 0{,}7 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ (BO = 5 ME)

$k(5) = 4{,}75$ (LPU = 4,75 GE)

Das BO liegt bei 5 ME und die KPU bei 4,75 GE.

b) $k_v(x) = 0{,}25x^2 - 2x + 6$

$k_v'(x) = 0{,}5x - 2$ und $k_v''(x) = 0{,}5$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = 0{,}5x - 2$

$x = 4$

$k''(4) = 0{,}5 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $k_v(4) = 2$ (BM = 4 ME und KPU = 2 GE)

Das BM liegt bei 4 ME und die KPU bei 2 GE.

3. Aufgabe

a) $K(x) = 2x^3 - 18x^2 + 60x + 200$

$K'(x) = 6x^2 - 36x + 60$

$K''(x) = 12x - 36$

$K'''(x) = 12$

$K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$

$0 = 12x - 36$

$x = 3$

$K'''(3) = 12 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$K'(3) = 6$

$GK_{min}(3|6)$

Bei 3 ME liegt die geringste Kostensteigerung von 6 GE vor.

b) $k(x) = 2x^2 - 18x + 60 + \frac{200}{x}$ $x = 8$ $k(8) = 69$

Bei 8 ME entstehen Stückkosten von 69 GE.

c) $k(x) = 70$

$70 = 2x^2 - 18x + 60 + \frac{200}{x} \Big| \cdot x$

$70x = 2x^3 - 18x^2 + 60x + 200 | -70x$ Polynomdivision mit $x_1 = 4$ ergibt $0 = x^2 - 5x - 25$

$0 = 2x^3 - 18x^2 - 10x + 200 | : 2$ p-q liefert $x_2 = 8{,}1$ und $[x_3 = -3{,}1]$

$0 = x^3 - 9x^2 - 5x + 100$

Stückkosten von 70 GE entstehen bei 4 ME und 8,1 ME.

d) $k_v(x) = 2x^2 - 18x + 60$

$k_v'(x) = 4x - 18$ und $k_v''(x) = 4$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = 4x - 18$

$x = 4{,}5$ $k''(4{,}5) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $k_v(4{,}5) = 19{,}5$

Das BM liegt bei 4,5 ME und die KPU bei 19,5 GE.

4. Aufgabe

a) $k_v(x) = x^2 - 9x + 27$

$k_v'(x) = 2x - 9$ und $k_v''(x) = 2$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 9$

$x = 4{,}5$ $k''(4{,}5) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $k_v(4{,}5) = 6{,}75$

Das BM liegt bei 4,5 ME und die KPU bei 6,75 GE.

b) $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} \Big| \cdot x$

$k_v(x) \cdot x = K_v(x)$

$K_v(x) = (x^2 - 9x + 27) \cdot x$

$K_v(x) = x^3 - 9x^2 + 27x$

$K(x) = K_v(x) + K_{fix}$

$K(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + K_{fix}$ einsetzen von $(3|52)$

$52 = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 27 \cdot 3 + K_{fix}$

$K_{fix} = 25$

$\Rightarrow K(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 25$

c) $K(x) = 44$

$44 = x^3 - 9x^2 + 27x + 25 | -44$

$0 = x^3 - 9x^2 + 27x - 19$

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 - 8x + 19$

In der p-q-Formel ergibt sich eine negative Wurzel. Somit existieren keine weiteren Lösungen für x.

Kosten von 44 GE liegen bei 1 ME vor.

5. Aufgabe

a) $K'(x) = 3x^2 - 18x + 30$

$K''(x) = 6x - 18$

$K'''(x) = 6$

$K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$

$0 = 6x - 18$

$x = 3$

$K'''(3) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$K'(3) = 3$

$GK_{min}(3|3)$

Das Grenzkostenminimum gibt die Stelle mit der geringsten Kostensteigerung an.

b) niedrigster Preis = KPU

Dazu benötigt man die variable Stückkostenfunktion, die man aus der variablen Kostenfunktion bilden kann.

Diese $K_v(x)$ muss man sich aber erst aus der Grenzkostenfunktion herleiten. Da die gegebene Grenzkostenfunktion eine Ableitung ist, muss man jeden einzelnen Term „aufleiten", das heißt, in seine ursprüngliche Fassung zurückführen.

$K'(x) = 3x^2 - 18x + 30$ (3x² waren vor dem Ableiten x³ usw.)

$K_v(x) = x^3 - 9x^2 + 30x$

$k_v(x) = x^2 - 9x + 30$

$k_v'(x) = 2x - 9$ und $k_v''(x) = 2$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 9$

$x = 4{,}5$ $\quad k''(4{,}5) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.} \qquad k_v(4{,}5) = 9{,}75$

Das BM liegt bei 4,5 ME und die KPU bei 9,75 GE.

c) $K_v(x) = x^3 - 9x^2 + 30x$ und $K_{fix} = 10$

$K(x) = K_v(x) + K_{fix}$

$K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 10$