Lösungen M 18

1. Aufgabe

a)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_y(0\|-2)$	$f(0) = -2$	I	$d = -2$
$x = 0\,;K = 0$	$f''(0) = 0$	II	$2b = 0 \Rightarrow b = 0$
$P(3\|-20)$	$f(3) = -20$	III	$27a + 9b + 3c + d = -20$
$x = 3\,;m = -24$	$f'(3) = -24$	IV	$27a + 6b + c = -24$

b entfällt und d einsetzen ergibt

III $\quad 27a + 3c = -18$

IV $\quad 27a + c = -24$

TR: $a = -1;\ c = 3$ => $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

b)

Bei einer senkrechten Abstandsberechnung muss man wissen, welche Funktion „oben liegt“. Durch Berechnung der y-Werte zu einem beliebigen x-Wert aus dem gegebenen Intervall kann man die Lage zuordnen.

Intervall $[0;2]$

Bsp. $x = 1$

$f(1) = 0$ Da $0 > -3$ ist, liegt f(x) oben.

$g(1) = -3$

1. HB $\quad d = f(x) - g(x) \qquad$ d = Differenz (Abstand)

2. NB $\quad f(x) = -x^3 + 3x - 2$

$\qquad g(x) = -x - 2$

3. $\quad d(x) = -x^3 + 3x - 2 - (-x - 2)$

$\qquad d(x) = -x^3 + 3x - 2 + x + 2$

$\qquad d(x) = -x^3 + 4x \qquad$ **Zielfunktion**

4. $\quad d'(x) = -3x^2 + 4$

$\qquad d''(x) = -6x$

$\qquad d'(x_E) = 0$

$\qquad 0 = -3x^2 + 4$

$\qquad x_{E1} \approx 1{,}15 \qquad x_{E2} \approx -1{,}15 \notin D$

$\qquad d'(x_E) = 0 \wedge d''(x) \neq 0$

$\qquad d''(1{,}15) = -6{,}9 < 0 \Rightarrow$ Max.

$\qquad d(1{,}15) \approx 3{,}08$

Der maximale Abstand beträgt 3,08 LE.

2. Aufgabe

1. HB $A = 4 \cdot a \cdot b$

2. NB $600 = 6a + 6b$

$600 - 6b = 6a$

$100 - b = a$

3. $A(b) = 4 \cdot (100 - b) \cdot b$

$A(b) = 400b - 4b^2$

$A(b) = -4b^2 + 400b$ **Zielfunktion**

4. $A'(b) = -8b + 400$

$A''(b) = -8$

$A'(b_E) = 0$

$0 = -8b + 400$

$b_E = 50$

$A'(b_E) = 0 \wedge A''(b_E) \neq 0$

$A''(50) = -8 < 0 \Rightarrow$ Max.

$A(50) = 10000$

$100 - 50 = a$

$a = 50$

Jedes Grundstück ist 50 m lang und 50 m breit und die maximale Gesamtfläche der vier Grundstücke beträgt 10.000 m².

3. Aufgabe

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_y(0\|37)$	$f(0) = 37$	I	$d = 37$
$x = 1; K = 0$	$f''(1) = 0$	II	$6a + 2b = 0$
$x = 2; m = 0$	$f'(2) = 0$	III	$12a + 4b + c = 0$
$P(2\|39)$	$f(2) = 39$	IV	$8a + 4b + 2c + d = 39$

d einsetzen in IV ergibt

IV $8a + 4b + 2c = 2$

TR: $a = -0{,}5$; $b = 1{,}5$; $c = 0$ => $f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 + 37$

4. Aufgabe

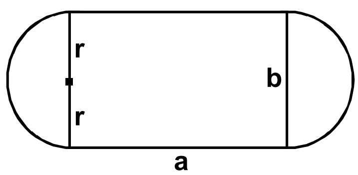
1. HB $A = a \cdot b$

2. NB $b = 2r$ Kreisumfang $u = 2\pi \cdot r$

$400 = 2a + 2\pi \cdot r$

$400 - 2\pi \cdot r = 2a$

$200 - \pi \cdot r = a$



3. $A(r) = (200 - \pi \cdot r) \cdot 2r$

$A(r) = 400r - 2\pi \cdot r^2$

$A(r) = -2\pi \cdot r^2 + 400r$ **Zielfunktion**

4. $A'(r) = -4\pi \cdot r + 400$

$A''(r) = -4\pi$

$A'(r_E) = 0$

$0 = -4\pi \cdot r + 400$

$4\pi \cdot r = 400$

$r_E = \frac{100}{\pi} \approx 31{,}83$

$A'(r_E) = 0 \wedge A''(r_E) \neq 0$

$A''(31{,}83) = -4\pi < 0 \Rightarrow$ Max.

$A(31{,}83) \approx 6366{,}20$

$b = 2 \cdot 31{,}83 = 63{,}66$

$a = 200 - \pi \cdot 31{,}83$

$a \approx 100{,}00$

Die Rasenfläche ist 100,00 m lang und 63,66 m breit. Die maximale Fläche beträgt 6366,20 m².

5. Aufgabe

Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Für die Angaben kann man nur eine „spiegelgleiche Seite“ benutzen. (vorzugsweise rechts von der y-Achse)

$f(x) = ax^3 + bx$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$H(2\|4)$	$f(2) = 4$	I	$8a + 2b = 4$
$x = 2;\ m = 0$	$f'(2) = 0$	II	$12a + b = 0$

TR: $a = -0{,}25;\quad b = 3$

$f(x) = -0{,}25x^3 + 3x$

Erkennt man die Punktsymmetrie nicht, sind vier Angaben notwendig. Je nachdem welche Angaben man benutzt, ergeben sich Gleichungssysteme, die sofort oder erst nach weiterem Umformen dann mit dem Taschenrechner lösbar sind.
Egal wie man ansetzt, es ergeben sich immer b und d gleich 0 und somit die obige Gleichung.

6. Aufgabe

1. HB $V = a^2 \cdot h$

2. NB $90 = 8a + 4h$

$90 - 8a = 4h$

$h = 22{,}5 - 2a$

3. $V(a) = a^2 \cdot (22{,}5 - 2a)$

$V(a) = -2a^3 + 22{,}5a^2$ **Zielfunktion**

4. $V'(a) = -6a^2 + 45a$

$V''(a) = -12a + 45$

$V'(a_E) = 0$

$0 = -6a^2 + 45a \,|\, :(-6)$

$0 = a^2 - 7{,}5a$

a ausklammern ergibt $a_1 = 0$ und $a_2 = 7{,}5$

$V'(a_E) = 0 \wedge V''(a_E) \neq 0$

$V''(0) = 45 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$V''(7{,}5) = -45 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$V(7{,}5) = 421{,}875 \approx 421{,}88$

$h = 22{,}5 - 2 \cdot 7{,}5$

$h = 7{,}5$

Die Säule hat eine Länge und Breite von a = 7,5 cm, eine Höhe von h = 7,5 cm und ein maximales Volumen von 421,88 cm³.