Lösungen M 17

1. Aufgabe

a)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_y(0\|-2)$	$f(0) = -2$	I	$d = -2$
$x = 0\,; K = 0$	$f''(0) = 0$	II	$2b = 0 \Rightarrow b = 0$
$P(3\|-20)$	$f(3) = -20$	III	$27a + 9b + 3c + d = -20$
$x = 3\,; m = -24$	$f'(3) = -24$	IV	$27a + 6b + c = -24$

b entfällt und d einsetzen ergibt

III $27a + 3c = -18$

IV $27a + c = -24$

TR: $a = -1$; $c = 3$ => $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

b)

Bei einer senkrechten Abstandsberechnung muss man wissen, welche Funktion „oben liegt". Durch Berechnung der y-Werte zu einem beliebigen x-Wert aus dem gegebenen Intervall kann man die Lage zuordnen.

Intervall $[0;2]$

Bsp. $x = 1$

$f(1) = 0$ Da $0 > -3$ ist, liegt f(x) oben.

$g(1) = -3$

1. HB $d = f(x) - g(x)$ d = Differenz (Abstand)

2. NB $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

$g(x) = -x - 2$

3. $D = [0;2]$

4. $d(x) = -x^3 + 3x - 2 - (-x - 2)$

$d(x) = -x^3 + 3x - 2 + x + 2$

$d(x) = -x^3 + 4x$ **Zielfunktion**

5. $d'(x) = -3x^2 + 4$

$d''(x) = -6x$

$d'(x_E) = 0$

$0 = -3x^2 + 4$

$x_{E1} \approx 1{,}15$ $x_{E2} \approx -1{,}15 \notin D$

$d'(x_E) = 0 \wedge d''(x) \neq 0$

$d''(1{,}15) = -6{,}9 < 0 \Rightarrow$ Max.

6. $f(1{,}15) \approx -0{,}07$ y-Werte

$g(1{,}15) = -3{,}15$ für die Differenz

7. $d = -0{,}07 - (-3{,}15) = 3{,}08$

8. $d(0) = 0 < 3{,}08$

$d(2) = 0 < 3{,}08$

Der maximale Abstand beträgt 3,08 LE.

LE = Längeneinheiten

2. Aufgabe

1. HB $A = 4 \cdot a \cdot b$

2. NB $600 = 6a + 6b$

3.
$$600 - 6b = 6a$$
$$100 - b = a$$
$$a = 0$$
$$100 - b = 0$$
$$100 = b$$
$$D = [0;100]$$

4.
$$A(b) = 4 \cdot (100 - b) \cdot b$$
$$A(b) = 400b - 4b^2$$
$$A(b) = -4b^2 + 400b \qquad \textbf{Zielfunktion}$$

5.
$$A'(b) = -8b + 400$$
$$A''(b) = -8$$
$$A'(b_E) = 0$$
$$0 = -8b + 400$$
$$b_E = 50$$
$$A'(b_E) = 0 \wedge A''(b_E) \neq 0$$
$$A''(50) = -8 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

6.
$$100 - 50 = a$$
$$a = 50$$

7.
$$A = 4 \cdot 50 \cdot 50$$
$$A = 10000$$

8.
$$A(0) = 0 < 10000$$
$$A(100) = 0 < 10000$$

Jedes Grundstück ist 50 m lang und 50 m breit und die maximale Gesamtfläche beträgt 10.000 m².

3. Aufgabe

Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Für die Angaben kann man nur eine „spiegelgleiche Seite“ benutzen. (vorzugsweise rechts von der y-Achse)

$$f(x) = ax^3 + bx$$
$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$H(2\|4)$	$f(2) = 4$	I	$8a + 2b = 4$
$x = 2;\ m = 0$	$f'(2) = 0$	II	$12a + b = 0$

TR: $a = -0{,}25;\quad b = 3$

$$f(x) = -0{,}25x^3 + 3x$$

Erkennt man die Punktsymmetrie nicht, sind vier Angaben notwendig. Je nachdem welche Angaben man benutzt, ergeben sich Gleichungssysteme, die sofort oder erst nach weiterem Umformen dann mit dem Taschenrechner lösbar sind.
Egal wie man ansetzt, es ergeben sich immer b und d gleich 0 und somit die obige Gleichung.

4. Aufgabe

1. HB $V = a^2 \cdot h$

2. NB $90 = 8a + 4h$

3.
$$90 - 8a = 4h$$
$$h = 22{,}5 - 2a$$
$$h = 0$$
$$0 = 22{,}5 - 2a \qquad \Rightarrow \quad D = [0;11{,}25]$$
$$a = 11{,}25$$

4.
$$V(a) = a^2 \cdot (22{,}5 - 2a)$$
$$V(a) = -2a^3 + 22{,}5a^2$$ **Zielfunktion**

5.
$$V'(a) = -6a^2 + 45a$$
$$V''(a) = -12a + 45$$
$$V'(a_E) = 0$$
$$0 = -6a^2 + 45a \,|: (-6)$$
$$0 = a^2 - 7{,}5a$$
a ausklammern ergibt $a_1 = 0$ und $a_2 = 7{,}5$
$$V'(a_E) = 0 \wedge V''(a_E) \neq 0$$
$$V''(0) = 45 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$
$$V''(7{,}5) = -45 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

6.
$$h = 22{,}5 - 2 \cdot 7{,}5$$
$$h = 7{,}5$$

7.
$$V = 7{,}5^2 \cdot 7{,}5$$
$$V = 421{,}88$$

8.
$$V(0) = 0 < 421{,}88$$
$$V(11{,}25) = 0 < 421{,}88$$

Die Säule hat eine Länge und Breite von a = 7,5 cm, eine Höhe von h = 7,5 cm und ein maximales Volumen von 421,88 cm³.

5. Aufgabe

1. HB $O = 2a^2 + 4a \cdot h$ O = Oberfläche

2. NB $512 = a^2 \cdot h$

3.
$$\frac{512}{a^2} = h$$
$h = 0$ Hat eine Seite keine Länge, so kann kein Volumen entstehen.
$$0 = \frac{512}{a^2} \,\Big|\cdot a^2$$
Angabe von D nicht konkret möglich, näherungsweise $D = [0;+\infty[$
$$0 \neq 512$$

4.
$$O(a) = 2a^2 + 4a \cdot \frac{512}{a^2}$$
$$O(a) = 2a^2 + \frac{2048}{a}$$
$$O(a) = 2a^2 + 2048 \cdot a^{-1}$$ **Zielfunktion**

5.
$$O'(a) = 4a - 2048 \cdot a^{-2}$$
Ableitungsregeln beachten
$$O''(a) = 4 + 4096 \cdot a^{-3}$$
$$O'(a_E) = 0$$

$0 = 4a - 2048 \cdot a^{-2} \,\big|\, \cdot a^2$

$0 = 4a^3 - 2048$

$512 = a^3 \,\big|\, \sqrt[3]{}$

$8 = a_E$

$O'(a_E) = 0 \wedge O''(a_E) \neq 0$

$O''(8) = 12 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

6. $h = \frac{512}{8^2}$

$h = 8$

7. $O = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 \cdot 8$

$O = 384$

8. Untersuchung der Randextrema nur mit Grenzwertberechnung (Näherungsrechnung) möglich

$a \to 0; O \to +\infty$

$a \to +\infty; O \to +\infty$

Hat der Tetrapack eine Würfelform mit der Seitenlänge 8 cm, so erhält man für das vorgegebene Volumen die kleinste Oberfläche mit 384 cm².

6. Aufgabe

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_y(0\|37)$	$f(0) = 37$	I	$d = 37$
$x = 1; K = 0$	$f''(1) = 0$	II	$6a + 2b = 0$
$x = 2; m = 0$	$f'(2) = 0$	III	$12a + 4b + c = 0$
$P(2\|39)$	$f(2) = 39$	IV	$8a + 4b + 2c + d = 39$

d einsetzen in IV ergibt

IV $8a + 4b + 2c = 2$

TR: $a = -0{,}5$; $b = 1{,}5$; $c = 0$ => $f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 + 37$

7. Aufgabe

1. HB $A = a \cdot b$

2. NB $b = 2r$ Kreisumfang $u = 2\pi \cdot r$

$400 = 2a + 2\pi \cdot r$

3. $400 - 2\pi \cdot r = 2a$

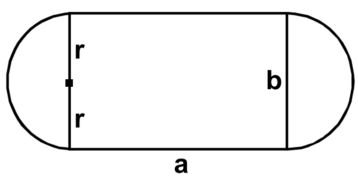
$200 - \pi \cdot r = a$

$a = 0$

$200 - \pi \cdot r = 0$

$r = \frac{200}{\pi} \approx 63{,}66$

$D = [0; 63{,}66]$



4. $A(r) = (200 - \pi \cdot r) \cdot 2r$

$A(r) = 400r - 2\pi \cdot r^2$

$A(r) = -2\pi \cdot r^2 + 400r$ **Zielfunktion**

5. $A'(r) = -4\pi \cdot r + 400$

$A''(r) = -4\pi$

$A'(r_E) = 0$

$0 = -4\pi \cdot r + 400$

$4\pi \cdot r = 400$

$r_E = \dfrac{100}{\pi} \approx 31{,}83$

$A'(r_E) = 0 \wedge A''(r_E) \neq 0$

$A''(31{,}83) = -4\pi < 0 \Rightarrow$ Max.

6. $b = 2 \cdot 31{,}83 = 63{,}66$

$a = 200 - \pi \cdot 31{,}83$

$a \approx 100{,}00$

7. $A = 100{,}00 \cdot 63{,}66$

$A = 6366$

8. $A(0) = 0 < 6366$

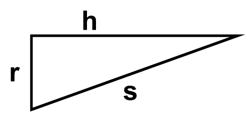
$A(63{,}66) = 0{,}79 < 6366$

Die Rasenfläche ist 100,00 m lang und 63,66 m breit. Die maximale Fläche beträgt 6366 m².

<u>8. Aufgabe</u>

1. HB $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ Volumen des Kegels

2. NB $90^2 = r^2 + h^2$ Pythagoras $s^2 = r^2 + h^2$



3. $8100 - h^2 = r^2$

$r = 0$

$0 = 8100 - h^2$ => $D = [0;90]$

$h = 90$

4. $V(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (8100 - h^2) \cdot h$

$V(h) = 2700\pi \cdot h - \frac{1}{3}\pi \cdot h^3$

$V(h) = -\frac{1}{3}\pi \cdot h^3 + 2700\pi \cdot h$ **Zielfunktion**

5. $V'(h) = -\pi \cdot h^2 + 2700\pi$

$V''(h) = -2\pi \cdot h$

$V'(h_E) = 0$

$0 = -\pi \cdot h^2 + 2700\pi$

$\pi \cdot h^2 = 2700\pi$

$h^2 = 2700$

$h_{E1} \approx 51{,}96$ $h_{E2} \approx -51{,}96 \notin D$

$V'(h_E) = 0 \wedge V''(h_E) \neq 0$

$V''(51{,}96) \approx -326{,}47 < 0 \Rightarrow$ Max.

6.

$$r^2 = 8100 - 51{,}96^2$$

$$r^2 = 5400{,}16$$

$$r_1 \approx 73{,}49 \qquad r_2 \approx -73{,}49 \text{ nicht möglich}$$

7.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 73{,}49^2 \cdot 51{,}96$$

$$V = 293.869{,}32$$

8.

$$V(0) = 0 < 293.869{,}32$$

$$V(90) = 0 < 293.869{,}32$$

Die Schultüte hätte eine Höhe von 51,96 cm und einen Radius von 73,49 cm.
Das maximale Volumen wäre 293.869,32 cm³ also 293,9 Liter.
Eine Schultüte mit fast 1,50 m Durchmesser und diesem Fassungsvermögen ist absolut unrealistisch.