Lösungen L 16

1. Aufgabe

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_y(0\|6)$	$f(0) = 6$	I	$6 = d$
$x = 0$; $m = 0$	$f'(0) = 0$	II	$0 = c$
$T(2\|2)$	$f(2) = 2$	III	$2 = 8a + 4b + 2c + d$
$x = 2$; $m = 0$	$f'(2) = 0$	IV	$0 = 12a + 4b + c$

c und d einsetzen in III und IV

III $2 = 8a + 4b + 6$ => III $-4 = 8a + 4b$ addieren ergibt $-4 = -4a$ => $a = 1$

IV $0 = 12a + 4b \,|\cdot(-1)$ => IV $0 = -12a - 4b$ einsetzen von a in IV ergibt $b = -3$

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$

b_1)

$f(0) = 6$

Zu Beginn sind es 600 gesunde Bäume.

b_2)

geringster Bestand => Tiefpunkt

$f'(x) = 0$ $\qquad f'(x) = 3x^2 - 6x$

$0 = 3x^2 - 6x$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$ $\qquad f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Max.

$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow$ Min.

Nach 2 Jahren ist der Bestand an gesunden Bäumen am geringsten.

b_3)

stärkste Abnahme an der Wendestelle ; Abnahme = Steigung an dieser Stelle

$f''(x) = 0$

$0 = 6x - 6$

$x = 1$

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ $\qquad f'''(x) = 6$

$f'''(1) = 6 > 0 \Rightarrow R - L - K$

Nach einem Jahr ist die Abnahme am stärksten.

$f'(1) = -3$

Die Abnahme beträgt zu diesem Zeitpunkt 300 Bäume pro Jahr.

b_4)

Zu Beginn sind es 600 Bäume, also $f(x) = 6$.

$6 = x^3 - 3x^2 + 6 \,|-6$

$0 = x^3 - 3x^2$

$x_{1/2} = 0$ und $x_3 = 3$

Nach 3 Jahren sind es wieder 600 gesunde Bäume.

c_1)

1. HB $A = x \cdot y$

2. NB $280 = 2x + 2y$

3. $y = 140 - x$

$y = 0$

$x = 140$ => $D = [0;140]$

4. $A(x) = x \cdot (140 - x)$

$A(x) = -x^2 + 140x$ **Zielfunktion**

5. $A'(x) = -2x + 140$

$A''(x) = -2$

$A'(x) = 0$

$0 = -2x + 140$

$x = 70$

$A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$A''(70) = -2 < 0 \Rightarrow$ Max.

6. $y = 140 - 70$

$y = 70$

7. $A = 70 \cdot 70$

$A = 4900$

8. $A(0) = 0 < 4900$

$A(140) = 0 < 4900$

Die maximale Fläche beträgt 4900 m². Die Seiten sind jeweils 70 m lang.

c_2)

$4900 - 100 = 4800$

$4800 : 600 = 8$

Pro Baum stehen 8 m² zur Verfügung.

d)

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

$f'''(x) = 6$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

3. KS **4.** $S_y(06)$ Nullstellen entfallen

5. Extrempunkte

$f'(x) = 0$ $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$0 = 3x^2 - 6x$ $f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow H$ $f(0) = 6$ $H(06)$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ $f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow T$ $f(2) = 2$ $T(2|2)$

6. Wendepunkte

$f''(x) = 0$ $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$0 = 6x - 6$ $f'''(1) = 6 > 0 \Rightarrow R - L - K$ $f(1) = 4$ $W_{R-L}(1|4)$

$x = 1$

7. Zeichnung