Lösungen K 13

1. Aufgabe

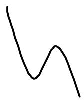
$f(x) = -x^3 - 4x^2 + 11x - 6$

$f'(x) = -3x^2 - 8x + 11$

$f''(x) = -6x - 8$

$f'''(x) = -6$

1. $x \to -\infty;\ f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty;\ f(x) \to -\infty$



2. KS **3.** $S_y(0|-6)$ und für S_x $f(x) = 0$ =>

$0 = -x^3 - 4x^2 + 11x - 6 \quad |:(-1)$

$0 = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 + 5x - 6$

p-q liefert $x_2 = 1$ und $x_3 = -6$

$S_{x1/2}(1|0) \quad S_{x3}(-6|0)$

4. Extrempunkte $f'(x) = 0 \ \wedge \ f''(x) \neq 0$

1. Schritt

$0 = -3x^2 - 8x + 11 \quad |:(-3)$

$0 = x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{11}{3}$

p-q ergibt $x_1 = 1$ und $x_2 = -\frac{11}{3}$

2. Schritt

$f''(1) = -14 < 0$ => Hochpunkt

$f''(-\frac{11}{3}) = 14 > 0$ => Tiefpunkt

3. Schritt

$f(1) = 0 \qquad H(1|0)$

$f(-\frac{11}{3}) = -50{,}8 \qquad T(-3{,}7|-50{,}8)$

---

5. Wendepunkte $f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

1. Schritt

$0 = 6x - 8 \quad +8$

$8 = 6x \quad |:6$

$\frac{4}{3} = x$

2. Schritt

$f'''(\frac{4}{3}) = -6 < 0 \quad L-R-K$

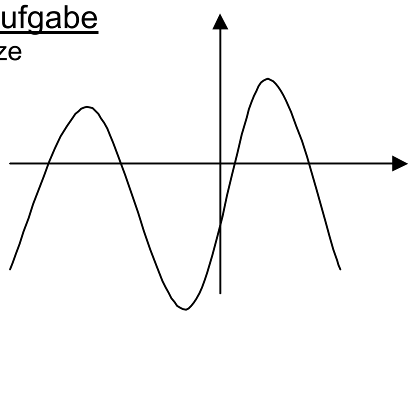
3. Schritt

$f(\frac{4}{3}) = -0{,}8 \qquad W_{L-R}(1{,}3|-0{,}8)$

Keine Zeichnung auf Grund der Hohen Werte beim Tiefpunkt

2. Aufgabe

Skizze



Hoch- und Tiefpunkt sind Punkte mit konkret vorgegebenen Richtungen. Da zwischen beiden kein weiterer Punkt liegt, kann man sie direkt verbinden. Nach dem Hochpunkt wird kein Punkt mehr angegeben, also verläuft die Funktion immer weiter nach unten. Links vom Tiefpunkt muss die Funktion durch beide Nullstellen. Dadurch ergibt sich zwischen den Nullstellen eine Hochpunkt und die Funktion muss von unten kommen.

Somit ergibt sich der Graph einer Funktion 4. Grades mit negativem Vorzeichen (kommt von unten, geht nach unten) und er besitzt keine Symmetrie, sonst müsste der Tiefpunkt auf der y-Achse liegen.

3. Aufgabe

$f(x) = 0{,}5x^3 - 2{,}25x^2 - 10x + 12$

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 4{,}5x - 10$

$f'(x) = m \quad m = 5$

$5 = 1{,}5x^2 - 4{,}5x - 10 \quad |-5$

$0 = 1{,}5x^2 - 4{,}5x - 15 \quad |:1{,}5$ p-q ergibt $x_1 = 5 \quad x_2 = -2$ Es gibt also zwei Tangenten!

$0 = x^2 - 3x - 10$

$t_1(x)$	$t_2(x)$
$f(5) = -31{,}75$ y-Wert	$f(-2) = 19$ y-Wert
$t_1(x) = m \cdot x + b$	$t_2(x) = m \cdot x + b$
$-31{,}75 = 5 \cdot 5 + b$	$19 = 5 \cdot (-2) + b$
$b = -56{,}75$	$b = 29$
$t_1(x) = 5x - 56{,}75$	$t_2(x) = 5x + 29$

4. Aufgabe

In einer Tangentengleichung kann man den y-Wert berechnen, wenn man den x-Wert kennt. Da hier der Wendepunkt gesucht wird, muss man den x-Wert des Wendepunktes in der zweiten Ableitung berechnen. Die Variable a fällt beim Ableiten weg, daher kann man die Rechnung durchführen.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + a$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6$

$f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

$0 = 6x - 12$

$x = 2$

$f'''(2) = 6 > 0$ => $R - L - K$

Also liegt der Wendepunkt bei x = 2.

Einsetzen in t(x) ergibt den y-Wert $t(2) = -5$ also $W_{R-L}(2|-5)$

Setzt man den Wendepunkt in die Ausgangsfunktion ein, kann man a berechnen.

$-5 = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + a$

$-5 = a$

=> $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 5$

5. Aufgabe

$f(x) = -x^4 + 2x^3$

$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

$f''(x) = -12x^2 + 12x$

$f'''(x) = -24x + 12$

$f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

$0 = -12x^2 + 12x \quad |:(-12)$

$0 = x^2 - x$

Man kann x ausklammern oder p-q machen =>

$[x_1 = 0] \ \wedge \ x_2 = 1$

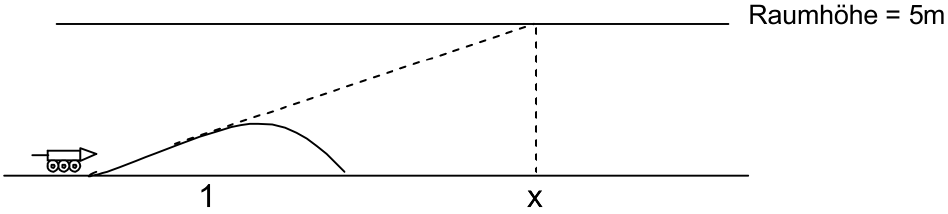
Da die null nicht zum Definitionsbereich gehört, kann man diese Lösung eckig einklammern und bei der weiteren Untersuchung weglassen.

$f'''(1) = -12 < 0$ => $L - R - K$ $\qquad f(1) = 1 \qquad W_{L-R}(1|1)$

Tangente: $t(x) = m \cdot x + b$

$f'(x) = m$ einsetzen $1 = 2 \cdot 1 + b$ => $t(x) = 2x - 1$

$f'(1) = 2$ $\quad b = -1$



Die Höhe 5m ist der y-Wert für die Tangente, also $t(x) = 5$

$5 = 2x - 1$ $\quad$ 3 – 1 = 2 $\quad$ => Die Rakete schlägt 2m weiter ein.

$x = 3$

6. Aufgabe

a) $f(0) = 37{,}3$ Zu Beginn liegt die Temperatur bei 37,3°C.

$f(x) = -0{,}1x^4 + 0{,}8x^2 + 37{,}3$

b) $f'(x) = -0{,}4x^3 + 1{,}6x$ $\qquad f'(x) = 0 \;\wedge\; f''(x) \neq 0$

$f''(x) = -1{,}2x^2 + 1{,}6$

$0 = -0{,}4x^3 + 1{,}6x \;|:(-0{,}4)$

x ausklammern ergibt $x_1 = 0$ und $0 = x^2 - 4$

$0 = x^3 - 4x$

$x_2 = 2$ und $[x_3 = -2]$ nicht im Def.

$f''(0) = 1{,}6 > 0 \quad Tp$

$f''(2) = -3{,}6 < 0 \quad Hp$

=> Am zweiten Tag ist die Temperatur am höchsten.

c)

$f(x) = 36{,}4$

$36{,}4 = -0{,}1x^4 + 0{,}8x^2 + 37{,}3 \;|-36{,}4$

Substitution $x^2 = z$ => $0 = z^2 - 8z - 9$

$0 = -0{,}1x^4 + 0{,}8x^2 + 0{,}9 \;|:(-0{,}1)$

$0 = x^4 - 8x^2 - 9$

Das Lösen mit p-q ergibt: $z_1 = 9$ und $z_2 = -1$.

Resubstitution mit $z = x^2$ => $x^2 = 9$ und $x^2 = -1$; Wurzel ziehen nur bei $x^2 = 9$ möglich, $x^2 = -1$ bringt keine Lösungen.

$x^2 = 9 \;|\sqrt{}$

$x_1 = 3$ Die Versuchsperson hat nach drei Tagen 36,4°C erreicht.

$[x_2 = -3]$