Lösungen J 15

1. Aufgabe

a)

1. HB $S = f(x) + g(x)$ S = Summe; Funktionswerte = y-Werte

2. NB $f(x) = -0{,}5x^2 + 2$
$g(x) = x^2 - 2x + 2$

3. $D = [0;4]$

4. $S(x) = -0{,}5x^2 + 2 + x^2 - 2x + 2$

$\boxed{S(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 4}$ **Zielfunktion**

5. $S'(x) = x - 2$
$S''(x) = 1$ $S'(x) = 0 \wedge S''(x) \neq 0$
$S'(x) = 0$ $S''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$
$0 = x - 2$
$x = 2$

6. $f(2) = 0$
$g(2) = 2$ y-Werte

7. $S = 0 + 2$
$S = 2$

8. $S(0) = 4 > 2$
$S(4) = 4 > 2$

Der gesuchte x-Wert lautet 2, die y-Werte sind 0 und 2 und die minimale Summe ist 2.

b)

1. HB $D = f(x) - g(x)$ D = Differenz; Funktionswerte = y-Werte

2. NB $f(x) = -0{,}5x^2 + 2$
$g(x) = x^2 - 2x + 2$

3. $D = [0;4]$

4. $D(x) = -0{,}5x^2 + 2 - (x^2 - 2x + 2)$

$\boxed{D(x) = -1{,}5x^2 + 2x}$ **Zielfunktion**

5. $D'(x) = -3x + 2$
$D''(x) = -3$ $D'(x) = 0 \wedge D''(x) \neq 0$
$D'(x) = 0$ $D''(0{,}7) = -3 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$
$0 = -3x + 2$
$x = \frac{2}{3}$ oder 0,7

6. $f(0{,}7) = 1{,}8$
$g(0{,}7) = 1{,}1$ y-Werte

7. $D = 1{,}8 - 1{,}1$
$D = 0{,}7$

8. $D(0) = 0 < 0{,}7$
$D(4) = -16 < 0{,}7$

Der gesuchte x-Wert lautet 0,7, die y-Werte sind 1,8 und 1,1 und die maximale Differenz ist 0,7.

2. Aufgabe

1. HB $A = x \cdot y$

2. NB $f(x) = 1{,}5x^3 - 9x^2 + 48$

3. $f(x) = 0$ Berechnung der Nullstellen als Grenze

$0 = 1{,}5x^3 - 9x^2 + 48 \,|\, :1{,}5$

$0 = x^3 - 6x^2 + 0x + 32$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ ergibt $0 = x^2 - 2x - 8$

p-q liefert $x_2 = 4$ und $x_3 = -2 \notin D$ => $D = [0;4]$

4. $A(x) = x \cdot (1{,}5x^3 - 9x^2 + 48)$

$\boxed{A(x) = 1{,}5x^4 - 9x^3 + 48x}$ **Zielfunktion**

5. $A'(x) = 6x^3 - 27x^2 + 48$

$A''(x) = 18x^2 - 54x$

$A'(x) = 0$

$0 = 6x^3 - 27x^2 + 48 \,|\, :6$

$0 = x^3 - 4{,}5x^2 + 0x + 8$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ ergibt $0 = x^2 - 0{,}5x - 2$

p-q liefert $x_2 = 1{,}7$ und $x_3 = -1{,}2 \notin D$

$A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$A''(4) = 72 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$A''(1{,}7) = -39{,}8 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $f(1{,}7) = 29{,}4$ y-Wert

7. $A = 1{,}7 \cdot 29{,}4$

$A = 50$

8. $A(0) = 0 < 50$

$A(4) = 0 < 50$

Das Rechteck hat eine Breite von 1,7 cm, eine Höhe von 29,4 cm und einen Flächeninhalt von 50 cm².

3. Aufgabe

Gesucht: maximaler Flächeninhalt des rechteckigen Spielplatzes
Gesamter Umfang: 98 m Zaun + 2 m Tor = 100 m

1. $A = x \cdot y$ Hauptbedingung

2. $100 = 2x + 2y$ Nebenbedingung

3. $y = 50 - x$ Nebenbedingung umstellen

$y = 0$

$0 = 50 - x$ $D = [0;50]$ (für die Variable x, siehe Zielfunktion)

$x = 50$

4. $A(x) = x \cdot (50 - x)$

$A(x) = -x^2 + 50x$ Zielfunktion

5. $A'(x) = -2x + 50$

$A''(x) = -2$

$A'(x) = 0$

$0 = -2x + 50$

$x = 25$

$A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$A''(25) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $y = 50 - 25$

$y = 25$

7.
$$A = 25 \cdot 25$$
$$A = 625$$

8.
$$A(0) = 0 < 625$$
$$A(50) = 0 < 625$$

Der Spielplatz hat eine Länge und Breite von 25 m (quadratisch) und eine Fläche von 625 m².

4. Aufgabe

1. HB $V = a^2 \cdot h$

2. NB $90 = 8a + 4h$

3.
$$90 - 8a = 4h$$
$$\boxed{h = 22{,}5 - 2a}$$
$$h = 0$$
$$0 = 22{,}5 - 2a \qquad \Rightarrow \quad D = [0;11{,}25]$$
$$a = 11{,}25$$

4. $V(a) = a^2 \cdot (22{,}5 - 2a)$

$\boxed{V(a) = -2a^3 + 22{,}5a^2}$ **Zielfunktion**

5.
$$V'(a) = -6a^2 + 45a$$
$$V''(a) = -12a + 45$$
$$V'(x) = 0$$
$$0 = -6a^2 + 45a \,|\, :(-6)$$
$$0 = a^2 - 7{,}5a$$

a ausklammern ergibt $a_1 = 0$ und $a_2 = 7{,}5$

$$V'(x) = 0 \wedge V''(x) \neq 0$$
$$V''(0) = 45 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$
$$V''(7{,}5) = -45 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

6.
$$h = 22{,}5 - 2 \cdot 7{,}5$$
$$h = 7{,}5$$

7.
$$V = 7{,}5^2 \cdot 7{,}5$$
$$V = 421{,}9$$

8.
$$V(0) = 0 < 421{,}9$$
$$V(11{,}25) = 0 < 421{,}9$$

Die Säule hat eine Breite von a = 7,5 cm, eine Höhe von h = 7,5 cm und ein Volumen von 421,9cm³.

5. Aufgabe

Rechteckiges Ackerland mit 6 km Umfang.

1. HB $A = x \cdot y$

2. NB $6 = 2x + 2y$

3.
$$6 - 2x = 2y$$
$$\boxed{y = 3 - x}$$
$$y = 0$$
$$0 = 3 - x \qquad \Rightarrow \quad D = [0;3]$$
$$x = 3$$

4. $A(x) = x \cdot (3 - x)$

$\boxed{A(x) = -x^2 + 3x}$ **Zielfunktion**

5.
$$A'(x) = -2x + 3$$
$$A''(x) = -2$$

$$A'(x) = 0$$
$$0 = -2x + 3$$
$$x = 1{,}5$$
$$A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$$
$$A''(1{,}5) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

6. $y = 3 - 1{,}5$, $y = 1{,}5$

7. $A = 1{,}5 \cdot 1{,}5$, $A = 2{,}25$

8. $A(0) = 0 < 2{,}25$, $A(3) = 0 < 2{,}25$

Das Ackerland ist 1,5 km breit und 1,5 km lang und der Flächeninhalt beträgt 2,25 km².