

# Lösungen J 13

## Aufgabe 1

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a)  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

berührt die x-Achse = Nullstelle und Extrempunkt

### Angaben

$$S_x(-2|0)$$

$$x = -2 \text{ Extr.}$$

$$W(-1|-1)$$

$$x = -1 \text{ Wp}$$

### Mathematisierung

$$f(-2) = 0$$

$$f'(-2) = 0$$

$$f(-1) = -1$$

$$f''(-1) = 0$$

### Gleichungen

I  $0 = -8a + 4b - 2c + d$

II  $0 = 12a - 4b + c$

III  $-1 = -a + b - c + d$

IV  $0 = -6a + 2b$

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

b)  $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

### Angaben

$$S_x(-2|0)$$

$$x = -2 \text{ Extr.}$$

$$H(-1|3)$$

$$x = -1 \text{ Hp}$$

$$S_x(1|0)$$

### Mathematisierung

$$f(-2) = 0$$

$$f'(-2) = 0$$

$$f(-1) = 3$$

$$f'(-1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

### Gleichungen

I  $0 = 16a - 8b + 4c - 2d + e$

II  $0 = -32a + 12b - 4c + d$

III  $3 = a - b + c - d + e$

IV  $0 = -4a + 3b - 2c + d$

V  $0 = a + b + c + d + e$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

c)  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

### Angaben

$$x = 3 \text{ Tp}$$

$$S_x(5|0)$$

$$P(-1|2)$$

$$x = -1; m = -0,5$$

### Mathematisierung

$$f'(3) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f(-1) = 2$$

$$f'(-1) = -0,5$$

### Gleichungen

I  $0 = 27a + 6b + c$

II  $0 = 125a + 25b + 5c + d$

III  $2 = -a + b - c + d$

IV  $-0,5 = 3a - 2b + c$

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

d)  $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Wenn  $t(x)$  gegeben ist, kann man damit den zugehörigen  $y$ -Wert ausrechnen:  $t(3) = 5$ . Dieser Punkt ist dann der doppelte Schnittpunkt der Tangente mit der Funktion.

Die  $y$ -Achse hat den  $x$ -Wert null.  $x = 0$

### Angaben

$$S_{1/2}(3|5)$$

$$x = 3; m = 2$$

$$P(-1|4)$$

$$x = -1; m = -2$$

$$x = 0 \text{ Tp}$$

### Mathematisierung

$$f(3) = 5$$

$$f'(3) = 2$$

$$f(-1) = 4$$

$$f'(-1) = -2$$

$$f'(0) = 0$$

### Gleichungen

I  $5 = 81a + 27b + 9c + 3d + e$

II  $2 = 108a + 27b + 6c + d$

III  $4 = a - b + c - d + e$

IV  $-2 = -4a + 3b - 2c + d$

V  $0 = d$

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

e) **PS**  $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$   
 $f''(x) = 20ax^3 + 6bx$

Ein Sattelpunkt hat die Steigung  $m = 0$  und ist auch ein Wendepunkt.

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
Sattelp(2 1)	$f(2) = 1$	I $1 = 32a + 8b + 2c$
$x = 2; m = 0$	$f'(2) = 0$	II $0 = 80a + 12b + c$
$x = 2$ Wp	$f''(2) = 0$	III $0 = 160a + 12b$

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

f) **AS**  $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$   
 $f''(x) = 12ax^2 + 2b$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
W(-3 2)	$f(-3) = 2$	I $2 = 81a + 9b + c$
$x = -3$ Wp	$f''(-3) = 0$	II $0 = 108a + 2b$
$x = -3; m = -2$	$f'(-3) = -2$	III $-2 = -108a - 6b$

### Aufgabe 2

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

a)  $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$   
 $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
Sattelp(0 0)	$f(0) = 0$	I $0 = e$
$x = 0; m = 0$	$f'(0) = 0$	II $0 = d$
$x = 0$ Wp	$f''(0) = 0$	III $0 = 2c \Rightarrow c = 0$
$S_x(2 0)$	$f(2) = 0$	IV $0 = 16a + 8b + 4c + 2d + e$
$x = 1; m = 2$	$f'(1) = 2$	V $2 = 4a + 3b + 2c + d$

Die Variablen  $c$ ,  $d$  und  $e$  sind gleich null und fallen deshalb weg. Dies vereinfacht das Gleichungssystem auf:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 16a + 8b \\ 2 = 4a + 3b \cdot (-4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = 16a + 8b \\ -8 = -16a - 12b \end{array} \right\} + \text{ergibt } -8 = -4b \mid :(-4) \text{ also } b = 2$$

Durch Einsetzen in eine der beiden Gleichungen berechnet man:  $a = -1$ .  
 Man erhält die gesuchte Funktionsgleichung.

$$f(x) = -x^4 + 2x^3$$

(Überprüft man die einzelnen Angaben mit dieser Gleichung, kann man die Richtigkeit der Rechnung bestätigen.)

$$f(x) = ax^3 + bx$$

b) **PS**  $f'(x) = 3ax^2 + b$

$$f''(x) = 6ax$$

Angaben

$$P(1|-8)$$

$$x = 0 \quad m = -9$$

Mathematisierung

$$f(1) = -8$$

$$f'(0) = -9$$

Gleichungen

$$\text{I} \quad -8 = a + b$$

$$\text{II} \quad -9 = b$$

$b$  einsetzen in I ergibt:

$$a = 1$$

(Der Ursprung als Punkt selbst kann hier nicht verwendet werden, da dann nur  $0 = 0$  herauskommt.)

$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

c) **AS**  $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$$f''(x) = 12ax^2 + 2b$$

Angaben

$$S_y(0|4)$$

$$S_x(1|0)$$

$$x = 1; m = -6$$

Mathematisierung

$$f(0) = 4$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = -6$$

Gleichungen

$$\text{I} \quad 4 = c$$

$$\text{II} \quad 0 = a + b + c$$

$$\text{III} \quad -6 = 4a + 2b$$

Ist der Wert einer oder mehrerer Variablen bereits bekannt, setzt man diese in die anderen Gleichungen ein.

$$\left. \begin{array}{l} \text{II} \quad 0 = a + b + 4 \quad | -4 \\ \text{III} \quad -6 = 4a + 2b \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 = a + b \quad | \cdot (-2) \\ -6 = 4a + 2b \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 8 = -2a - 2b \\ -6 = 4a + 2b \end{array} \right\} +$$

$$2 = 2a \Rightarrow a = 1 \quad \text{Durch Einsetzen in z.B. II ergibt sich: } b = -5$$

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

d)  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Angaben

$$x = 2 \quad m = -6$$

$$W(0|-1)$$

$$x = 0 \quad Wp$$

$$x = 0; m = 6$$

Mathematisierung

$$f'(2) = -6$$

$$f(0) = -1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'(0) = 6$$

Gleichungen

$$\text{I} \quad -6 = 12a + 4b + c$$

$$\text{II} \quad -1 = d$$

$$\text{III} \quad 0 = 2b \Rightarrow b = 0$$

$$\text{IV} \quad 6 = c$$

$$-6 = 12a + 4 \cdot 0 + 6 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -x^3 + 6x - 1$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

e)  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
$U(0 0)$	$f(0) = 0$	I $0 = d$
$x = 0$ Extr.	$f'(0) = 0$	II $0 = c$
$P(-3 0)$	$f(-3) = 0$	III $0 = -27a + 9b - 3c + d$
$x = -3; m = 9$	$f'(-3) = 9$	IV $9 = 27a - 6b + c$

Die Variablen  $c$  und  $d$  sind null und fallen weg.

$$\left. \begin{array}{l} 0 = -27a + 9b \\ 9 = 27a - 6b \end{array} \right\} + \Rightarrow 9 = 3b \text{ also } b = 3 \text{ und durch Einsetzen ergibt sich } a = 1$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

f)  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

waagrechte Tangente = Steigung null

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
$S_x(4 0)$	$f(4) = 0$	I $0 = 64a + 16b + 4c + d$
$x = 4; m = 0$	$f'(4) = 0$	II $0 = 48a + 8b + c$
$W(2 3)$	$f(2) = 3$	III $3 = 8a + 4b + 2c + d$
$x = 2$ Wp	$f''(2) = 0$	IV $0 = 12a + 2b$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 64a + 16b + 4c + d \\ 3 = 8a + 4b + 2c + d \cdot (-1) \end{array} \right\} + \Rightarrow -3 = 56a + 12b + 2c$$

$$\left. \begin{array}{l} -3 = 56a + 12b + 2c \\ 0 = 48a + 8b + c \cdot (-2) \end{array} \right\} + \Rightarrow -3 = -40a - 4b$$

$$\left. \begin{array}{l} -3 = -40a - 4b \\ 0 = 12a + 2b \cdot 2 \end{array} \right\} + \Rightarrow -3 = -16a \Rightarrow a = \frac{3}{16}$$

Durch Einsetzen ergibt sich dann Stück für Stück:  $b = -\frac{9}{8}$  und  $c = 0$  und  $d = 6$

$$f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 6$$