Lösungen I 17

1. Aufgabe

a)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

berührt die x-Achse = Nullstelle und Extrempunkt

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_x(-2\|0)$	$f(-2) = 0$	I	$0 = -8a + 4b - 2c + d$
$x = -2$; $m = 0$	$f'(-2) = 0$	II	$0 = 12a - 4b + c$
$W(-1\|-1)$	$f(-1) = -1$	III	$-1 = -a + b - c + d$
$x = -1$; $K = 0$	$f''(-1) = 0$	IV	$0 = -6a + 2b$

b)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_x(-2\|0)$	$f(-2) = 0$	I	$0 = 16a - 8b + 4c - 2d + e$
$x = -2$; $m = 0$	$f'(-2) = 0$	II	$0 = -32a + 12b - 4c + d$
$H(-1\|3)$	$f(-1) = 3$	III	$3 = a - b + c - d + e$
$x = -1$; $m = 0$	$f'(-1) = 0$	IV	$0 = -4a + 3b - 2c + d$
$S_x(1\|0)$	$f(1) = 0$	V	$0 = a + b + c + d + e$

c)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$x = 3$; $m = 0$	$f'(3) = 0$	I	$0 = 27a + 6b + c$
$S_x(5\|0)$	$f(5) = 0$	II	$0 = 125a + 25b + 5c + d$
$P(-1\|2)$	$f(-1) = 2$	III	$2 = -a + b - c + d$
$x = -1$; $m = -0{,}5$	$f'(-1) = -0{,}5$	IV	$-0{,}5 = 3a - 2b + c$

d)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Wenn t(x) gegeben ist, kann man damit den zugehörigen y-Wert ausrechnen: t(3) = 5.
Dieser Punkt ist dann der doppelte Schnittpunkt der Tangente mit der Funktion.

Die y-Achse hat den x-Wert null. x = 0

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_{1/2}(3\|5)$	$f(3) = 5$	I	$5 = 81a + 27b + 9c + 3d + e$
$x = 3$; $m = 2$	$f'(3) = 2$	II	$2 = 108a + 27b + 6c + d$
$P(-1\|4)$	$f(-1) = 4$	III	$4 = a - b + c - d + e$
$x = -1$; $m = -2$	$f'(-1) = -2$	IV	$-2 = -4a + 3b - 2c + d$
$x = 0$; $m = 0$	$f'(0) = 0$	V	$0 = d$

e) **PS**

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$
$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$
$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

Ein Sattelpunkt hat die Steigung m = 0 und ist auch ein Wendepunkt.

Angaben	Mathematisierung		Gleichungen
Sattelp$(2\|1)$	$f(2) = 1$	I	$32a + 8b + 2c = 1$
$x = 2\,; m = 0$	$f'(2) = 0$	II	$80a + 12b + c = 0$
$x = 2\,;\ K = 0$	$f''(2) = 0$	III	$160a + 12b = 0$

f) **AS**

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 2b$$

Angaben	Mathematisierung		Gleichungen
$W(-3\|2)$	$f(-3) = 2$	I	$81a + 9b + c = 2$
$x = -3\,;\ K = 0$	$f''(-3) = 0$	II	$108a + 2b = 0$
$x = -3\,; m = -2$	$f'(-3) = -2$	III	$-108a - 6b = -2$

Aufgabe 2

a)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Angaben	Mathematisierung		Gleichungen
Sattelp$(0\|0)$	$f(0) = 0$	I	$0 = e$
$x = 0\,; m = 0$	$f'(0) = 0$	II	$0 = d$
$x = 0\,;\ K = 0$	$f''(0) = 0$	III	$0 = 2c$ => $0 = c$
$S_x(2\|0)$	$f(2) = 0$	IV	$0 = 16a + 8b + 4c + 2d + e$
$x = 1; m = 2$	$f'(1) = 2$	V	$2 = 4a + 3b + 2c + d$

Die Variablen c, d und e sind gleich null und fallen deshalb weg. Dies vereinfacht das Gleichungssystem auf:

IV $0 = 16a + 8b$
V $2 = 4a + 3b \,|\cdot(-4)$

=>

IV $0 = 16a + 8b$
V $-8 = -16a - 12b$

addieren ergibt $-8 = -4b \,|:(-4)$ also $b = 2$

Durch Einsetzen in eine der beiden Gleichungen berechnet man: $a = -1$.
Man erhält die gesuchte Funktionsgleichung.

$$f(x) = -x^4 + 2x^3$$

(Überprüft man die einzelnen Angaben mit dieser Gleichung, kann man die Richtigkeit der Rechnung bestätigen.)

b) **PS** $f(x) = ax^3 + bx$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen		
$P(1\vert -8)$	$f(1) = -8$	I	$-8 = a + b$	b einsetzen in I ergibt:
$x = 0\,; m = -9$	$f'(0) = -9$	II	$-9 = b$	$a = 1$

(Der Ursprung als Punkt selbst kann hier nicht verwendet werden, da dann nur 0 = 0 herauskommt.)

$f(x) = x^3 - 9x$

c) **AS** $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_y(0\vert 4)$	$f(0) = 4$	I	$4 = c$
$S_x(1\vert 0)$	$f(1) = 0$	II	$0 = a + b + c$
$x = 1; m = -6$	$f'(1) = -6$	III	$-6 = 4a + 2b$

Ist der Wert einer oder mehrerer Variablen bereits bekannt, setzt man diese in die anderen Gleichungen ein.

II $\quad 0 = a + b + 4 \,\vert -4 \qquad -4 = a + b \,\vert \cdot (-2) \qquad 8 = -2a - 2b$

III $\quad -6 = 4a + 2b \qquad -6 = 4a + 2b \qquad -6 = 4a + 2b$ addieren

$2 = 2a$ => $a = 1$ Durch Einsetzen in z.B. II ergibt sich: $b = -5$

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

d) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$x = 2 \;\; m = -6$	$f'(2) = -6$	I	$-6 = 12a + 4b + c$
$W(0\vert -1)$	$f(0) = -1$	II	$-1 = d$
$x = 0\,;\; K = 0$	$f''(0) = 0$	III	$0 = 2b$ => $0 = b$
$x = 0\,; m = 6$	$f'(0) = 6$	IV	$6 = c$

b und c einsetzen in I ergibt:

$-6 = 12a + 4 \cdot 0 + 6$ => $a = -1$

$f(x) = -x^3 + 6x - 1$

e)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$O(0\|0)$	$f(0) = 0$	I	$0 = d$
$x = 0 ;\ m = 0$	$f'(0) = 0$	II	$0 = c$
$P(-3\|0)$	$f(-3) = 0$	III	$0 = -27a + 9b - 3c + d$
$x = -3 ; m = 9$	$f'(-3) = 9$	IV	$9 = 27a - 6b + c$

Die Variablen c und d sind null und fallen weg.

III $0 = -27a + 9b$
IV $9 = 27a - 6b$ addieren => $9 = 3b$ also $b = 3$ und durch Einsetzen ergibt sich $a = 1$

$f(x) = x^3 + 3x^2$

f)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

waagrechte Tangente = Steigung null

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_x(4\|0)$	$f(4) = 0$	I	$0 = 64a + 16b + 4c + d$
$x = 4 ; m = 0$	$f'(4) = 0$	II	$0 = 48a + 8b + c$
$W(2\|3)$	$f(2) = 3$	III	$3 = 8a + 4b + 2c + d$
$x = 2 ;\ K = 0$	$f''(2) = 0$	IV	$0 = 12a + 2b$

I $0 = 64a + 16b + 4c + d$ $\quad$ $0 = 64a + 16b + 4c + d$
III $3 = 8a + 4b + 2c + d \,|\cdot(-1)$ $\quad$ $-3 = -8a - 4b - 2c - d$ addieren => V $-3 = 56a + 12b + 2c$

V $-3 = 56a + 12b + 2c$ $\quad$ $-3 = 56a + 12b + 2c$
II $0 = 48a + 8b + c \,|\cdot(-2)$ $\quad$ $0 = -96a - 16b - 2c$ addieren => VI $-3 = -40a - 4b$

VI $-3 = -40a - 4b$ $\quad$ $-3 = -40a - 4b$
IV $0 = 12a + 2b \,|\cdot 2$ $\quad$ $0 = 24a + 4b$ addieren => $-3 = -16a$ => $a = \frac{3}{16}$

Durch Einsetzen ergibt sich dann Stück für Stück: $b = -\frac{9}{8}$ und $c = 0$ und $d = 6$

$f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 6$