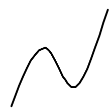
Lösungen H 14

1. Aufgabe

a) $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ **1.** $D = R$ **2.** $x \to -\infty;\ f(x) \to -\infty$, $x \to +\infty;\ f(x) \to +\infty$



3. KS

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 6$ **4.** $S_y(0|-4)$ und für S_x $f(x) = 0$

$f''(x) = 3x - 6$ $0 = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 6x - 4 \,|\, : 0{,}5$

$f'''(x) = 3$ $0 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$

=> $0 = x^2 - 4x + 4$ p-q ergibt $x_{2/3} = 2$

=> $S_{x1/2/3}(2|0)$ (dreifache Nullstelle heißt Sattelpunkt.)

5. $f'(x) = 0 \ \wedge \ f''(x) \neq 0$

$0 = 1{,}5x^2 - 6x + 6 \,|\, : 1{,}5$ $f''(2) = 0 \Rightarrow Sattelpunkt$

$0 = x^2 - 4x + 4$ $f(2) = 0$ => $Sp(2|0)$

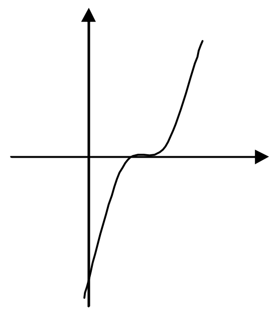
p-q ergibt $x_{1/2} = 2$

6. $f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

$0 = 3x - 6$ $f'''(2) = 3 > 0 \Rightarrow R-L-K$

$x = 2$ $f(2) = 0$ => $W_{R-L}(2|0)$

7. Skizze



b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$ **1.** $D = R$ **2.** $x \to -\infty;\ f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty;\ f(x) \to +\infty$

3. KS

$f'(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$ **4.** $S_y(0|0)$ und für S_x $f(x) = 0$

$f''(x) = 3x^2 + 8x + 4$ $0 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \,\Big|\, : \frac{1}{4}$

$f'''(x) = 6x + 8$ $0 = x^4 + \frac{16}{3}x^3 + 8x^2$ ausklammern von x^2 führt zu $x_{1/2} = 0$

$0 = x^2 + \frac{16}{3}x + 8$ p-q ergibt keine weitere Lösung, da Wurzel negativ => $S_{x1/2}(0|0)$

(doppelte Nullstelle => Extrempunkt)

5. $f'(x) = 0 \ \wedge \ f''(x) \neq 0$

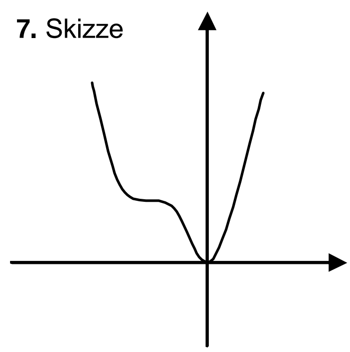
$0 = x^3 + 4x^2 + 4x$ $f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow T$

Ausklammern von x => $x_1 = 0$ $f''(-2) = 0 \Rightarrow Sattelpunkt$

$0 = x^2 + 4x + 4$ $f(0) = 0$ => $T(0|0)$

p-q ergibt $x_{2/3} = -2$ $f(-2) = 0$ => $Sp(-2|0)$

7. Skizze



6. $f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

$0 = 3x^2 + 8x + 4 \,|\, : 3$ $f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 4 > 0 \Rightarrow R-L-K$

$0 = x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}$ $f'''(-2) = -4 < 0 \Rightarrow L-R-K$

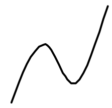
p-q ergibt $x_1 = -\frac{2}{3}$ und $x_2 = -2$ $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0{,}5$ => $W_{R-L}\left(-\frac{2}{3}\middle|0{,}5\right)$ oder $W_{R-L}(-0{,}7|0{,}6)$

$f(-2) = \frac{4}{3}$ => $W_{L-R}\left(-2\middle|\frac{4}{3}\right)$ oder $W_{L-R}(-2|1{,}3)$

2. Aufgabe

a) $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x + 4{,}5$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty;\ f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty;\ f(x) \to +\infty$



3. KS

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 3$

$f''(x) = 3x$

$f'''(x) = 3$

4. $S_y(0|4{,}5)$ und für S_x $f(x) = 0$

$0 = 0{,}5x^3 - 3x + 4{,}5 |: 0{,}5$

$0 = x^3 + 0x^2 - 6x + 9$ Polynomdivision mit $x_1 = -3$

=> $0 = x^2 - 3x + 3$ p-q ist n.l. , da Wurzel negativ

=> $S_{x1}(-3|0)$ (einzige Nullstelle)

5. $f'(x) = 0 \ \wedge \ f''(x) \neq 0$

$0 = 1{,}5x^2 - 3 |+3$

$3 = 1{,}5x^2 |: 1{,}5$

$2 = x^2 |\sqrt{\ }$

$x_1 = 1{,}4$ und $x_2 = -1{,}4$

$f''(1{,}4) = 4{,}2 > 0 \Rightarrow T$

$f''(-1{,}4) = -4{,}2 < 0 \Rightarrow H$

$f(1{,}4) = 1{,}7$ => $T(1{,}4|1{,}7)$

$f(-1{,}4) = 7{,}3$ => $H(-1{,}4|7{,}3)$

6. $f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

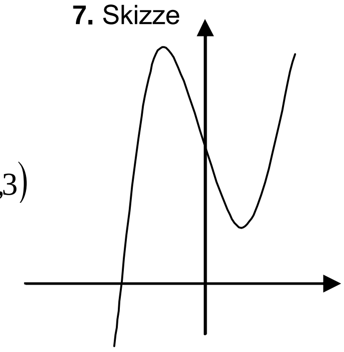
$0 = 3x$

$x = 0$

$f'''(0) = 3 > 0 \Rightarrow R - L - K$

$f(0) = 4{,}5$ => $W_{R-L}(0|4{,}5)$

7. Skizze



b) $f'(x) = m$ und $m = -1{,}5$

$-1{,}5 = 1{,}5x^2 - 3$

$x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

c) $f'(x) = m$ und $S_{x1}(-3|0)$

$f'(-3) = 10{,}5$ also $m = 10{,}5$

d) $t(x) = m \cdot x + b$ und $m = 10{,}5$ und $S_{x1}(-3|0)$

$0 = 10{,}5 \cdot (-3) + b$

$31{,}5 = b$

$t(x) = 10{,}5x + 31{,}5$

e) $t(x) = f(x)$

$10{,}5x + 31{,}5 = 0{,}5x^3 - 3x + 4{,}5$

$0 = 0{,}5x^3 - 13{,}5x - 27 |: 0{,}5$

$0 = x^3 - 27x - 54$

Polynomdivision mit $x_1 = -3$ (Tangentenstelle)

$0 = x^2 - 3x - 18$

p-q ergibt $x_2 = 6$ und $x_3 = -3$ (Tangente)

$t(6) = 94{,}5$ => $S_3(6|94{,}5)$

f) $m_1 \cdot m_2 = -1$ bzw. $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ => $m_1 = -\frac{1}{3}$ also $m_2 = +3$

$f'(x) = m_t$

$3 = 1{,}5x^2 - 3 |+3$

$6 = 1{,}5x^2 |: 1{,}5$

$f(2) = 2{,}5$ $f(-2) = 6{,}5$

jetzt mit $m = -\frac{1}{3}$ die Normalen bestimmen in $n(x) = m \cdot x + b$

$2{,}5 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + b$ $6{,}5 = -\frac{1}{3} \cdot (-2) + b$

$4 = x^2 \,|\sqrt{}$ $\qquad b = \frac{19}{6}$ (wahr) $\qquad b = \frac{43}{6}$ (falsch)

$x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ $\qquad$ Der gesuchte Punkt lautet $(2|2{,}5)$.

Anmerkung:
Über eine reine Schnittpunktberechnung kann man diese Aufgabe nicht lösen, da die Normale keine doppelte Lösung liefert wie die Tangente.
Man kann aber, wenn man die beiden möglichen Punkte in f(x) bestimmt hat, diese Punkte in der n(x) überprüfen. Der Punkt, in dem die Normale als solche die Funktion f(x) schneidet, stimmt dann überein.

<u>3. Aufgabe</u>

a) $t(x) = f(x)$

$39x + 22 = 2x^3 - 12x^2 + 9x + 6 \,|-39x - 22$ $\qquad$ Polynomdivision mit $x_1 = -1$ ergibt

$0 = 2x^3 - 12x^2 - 30x - 16 \,|: 2$ $\qquad$ $0 = x^2 - 7x - 8$ p-q liefert

$0 = x^3 - 6x^2 - 15x - 8$ $\qquad$ $x_2 = 8$ und $x_3 = -1$

Da die Stelle $x = -1$ doppelt vorkommt, liegt hier die Tangente an.

=> $f(-1) = -17$ also $S_{1/2}(-1|-17)$

b) Wendetangente = Tangente im Wendepunkt

$f'(x) = 6x^2 - 24x + 9$ $\qquad$ $f''(x) = 0 \;\wedge\; f'''(x) \neq 0$

$f''(x) = 12x - 24$ $\qquad$ $0 = 12x - 24$ $\qquad$ $f'''(2) = 12 > 0 \Rightarrow R - L - K$

$f'''(x) = 12$ $\qquad$ $x = 2$ $\qquad$ $f(2) = -8$ => $W_{R-L}(2|-8)$

$f'(x) = m$ also $f'(2) = -15$ einsetzen in t(x) ergibt $b = 22$ => $t(x) = -15x + 22$

c) $g(x) = f(x)$

$-x + 6 = 2x^3 - 12x^2 + 9x + 6 \,|+x - 6$ $\qquad$ x ausklammern ergibt $x_1 = 0$ und

$0 = 2x^3 - 12x^2 + 10x \,|: 2$ $\qquad$ $0 = x^2 - 6x + 5$ p-q liefert

$0 = x^3 - 6x^2 + 5x$ $\qquad$ $x_2 = 5$ und $x_3 = 1$

Da hier alle Schnittpunkte gesucht sind, müssen auch alle y-Werte berechnet werden.

$f(0) = 6 \quad f(5) = 1 \quad f(1) = 5 \qquad S_1(0|6) \quad S_2(5|1) \quad S_3(1|5)$

<u>4. Aufgabe</u>

a) Hier muss man erst den linken Wendepunkt berechnen, dann die Tangente ermitteln und am Ende den Abstand als Differenz berechnen.

$f(x) = 2{,}5x^4 - 15x^2 + 32{,}5$ $\qquad$ $f''(x) = 0 \;\wedge\; f'''(x) \neq 0$

$f'(x) = 10x^3 - 30x$ $\qquad$ $0 = 30x^2 - 30 \,|+30$ $\qquad$ $f'''(-1) = -60 < 0 \Rightarrow L - R - K$

$f''(x) = 30x^2 - 30$ $\qquad$ $30 = 30x^2 \,|: 30 \,|\sqrt{}$ $\qquad$ $f(-1) = 20$ => $W_{L-R}(-1|20)$

$f'''(x) = 60x$ $\qquad$ $(x_1 = 1)$ und $x_2 = -1$

$f'(x) = m$ also $f'(-1) = 20$

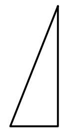
$t(x) = m \cdot x + b$

Durch Einsetzen ergibt sich $b = 40$ also $t(x) = 20x + 40$.

Der Abstand ist das Stück zwischen Tangente und Kurve auf der y-Achse!
Die Funktion f(x) hat auf der y-Achse den Wert 32,5 und die Tangente 40.

$40 - 32{,}5 = 7{,}5$ Der Abstand beträgt 7,5m.

b) Der tangential zurückgelegte Weg ist eine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks.
Die längste Seite muss mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.
Die Seite in x-Richtung beträgt 1, die Seite in y-Richtung beträgt 20.
(Wendepunkt $(-1|20)$ und $S_y(0|40)$ der Tangente benutzen)



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$1^2 + 20^2 = c^2$$

$$401 = c^2 \; \Big| \sqrt{}$$

$20 = c$ Der tangential zurückgelegte Weg beträgt 20m.