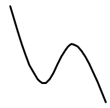
Lösungen G 15

1. Aufgabe

a) $f(x) = -0{,}5x^3 + x^2 + 2x - 1{,}5$ **1.** $D = R$ **2.** $x \to -\infty;\ f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty;\ f(x) \to -\infty$  **3.** KS

$f'(x) = -1{,}5x^2 + 2x + 2$ **4.** $S_y(0|-1{,}5)$ und für S_x $f(x) = 0$

$f''(x) = -3x + 2$ $0 = -0{,}5x^3 + x^2 + 2x - 1{,}5 \,|: (-0{,}5)$

$f'''(x) = -3$ $0 = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$ Polynomdivision mit $x_1 = 3$

=> $0 = x^2 + x - 1$ p-q ergibt $x_2 = 0{,}6$ $x_3 = -1{,}6$

=> $S_{x1}(3|0)$ $S_{x2}(0{,}6|0)$ $S_{x3}(-1{,}6|0)$

5. $f'(x) = 0$ $f'(x) = 0 \ \wedge\ f''(x) \neq 0$

$0 = -1{,}5x^2 + 2x + 2 \,|: (-1{,}5)$ $f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow H$ $f(2) = 2{,}5$ $H(2|2{,}5)$

$0 = x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$ $f''(-0{,}7) = 4{,}1 > 0 \Rightarrow T$ $f(-0{,}7) = -2{,}1$ $T(-0{,}7|-2{,}1)$

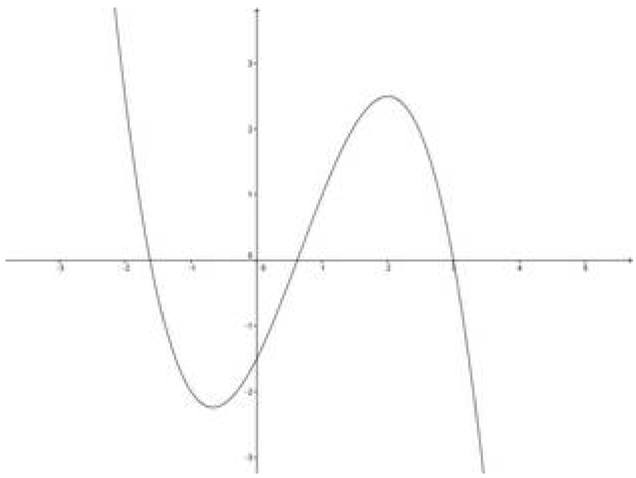
p-q ergibt $x_1 = 2$ $x_2 = -\frac{2}{3}$

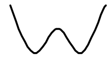
6. $f''(x) = 0$ $f''(x) = 0 \ \wedge\ f'''(x) \neq 0$

$0 = -3x + 2$ $f'''(0{,}7) = -3 < 0 \Rightarrow L - R - K$

$x = \frac{2}{3}$ $f(0{,}7) = 0{,}2$ => $W_{L-R}(0{,}7|0{,}2)$

7. Skizze



b) $f(x) = 0{,}25x^4 - 2{,}1x^2 + 3{,}5$ **1.** $D = R$ **2.** $x \to -\infty;\ f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty;\ f(x) \to +\infty$  **3.** AS

$f'(x) = x^3 - 4{,}2x$ **4.** $S_y(0|3{,}5)$ und für S_x $f(x) = 0$

$f''(x) = 3x^2 - 4{,}2$ $0 = 0{,}25x^4 - 2{,}1x^2 + 3{,}5 \,|: 0{,}25$

$f'''(x) = 6x$ $0 = x^4 - 8{,}4x^2 + 14$ Substitution mit $x^2 = z$

$0 = z^2 - 8{,}4z + 14$ p-q ergibt $z_1 = 6{,}1$ und $z_2 = 2{,}3$

Resubstitution mit $z = x^2$ und Wurzel ziehen ergibt $x_1 = 2{,}5$ $x_2 = -2{,}5$ $x_3 = 1{,}5$ $x_4 = -1{,}5$

$S_{x1}(2{,}5|0)$ $S_{x2}(-2{,}5|0)$ $S_{x3}(1{,}5|0)$ $S_{x4}(-1{,}5|0)$

5. $f'(x) = 0$

$0 = x^3 + 4{,}2x$

Ausklammern von x => $x_1 = 0$

$0 = x^2 - 4{,}2$

Wurzel ziehen ergibt

$x_2 = 2$ und $x_3 = -2$

$f'(x) = 0 \;\wedge\; f''(x) \neq 0$

$f''(0) = -4{,}5 < 0 \Rightarrow H$

$f''(2) = 7{,}8 > 0 \Rightarrow T$

$f''(-2) = 7{,}8 > 0 \Rightarrow T$

$f(0) = 3{,}5$ => $H(0|3{,}5)$

$f(2) = -0{,}9$ => $T(2|-0{,}9)$

$f(-2) = -0{,}9$ => $T(-2|-0{,}9)$

6. $f''(x) = 0$

$0 = 3x^2 - 4{,}2 \,|: 3$

$0 = x^2 - 1{,}4$

Wurzel ziehen ergibt

$x_1 = 1{,}2$ und $x_2 = -1{,}2$

$f''(x) = 0 \;\wedge\; f'''(x) \neq 0$

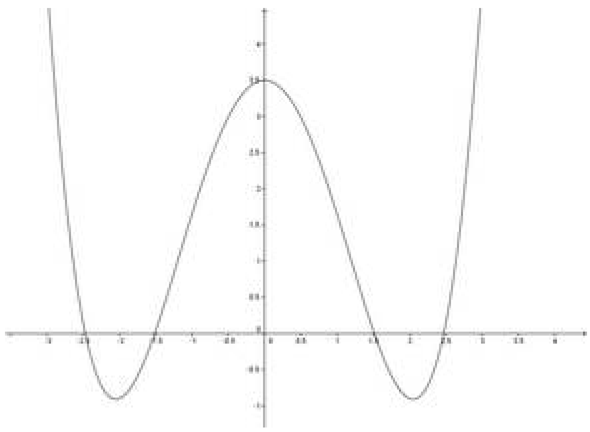
$f'''(1{,}2) = 7{,}2 > 0 \Rightarrow R - L - K$

$f'''(-1{,}2) = -7{,}2 < 0 \Rightarrow L - R - K$

$f(1{,}2) = 1{,}0$ => $W_{R-L}(1{,}2|1{,}0)$

$f(-1{,}2) = 1{,}0$ => $W_{L-R}(-1{,}2|1{,}0)$

7. Skizze



2. Aufgabe

a) $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x + 4{,}5$

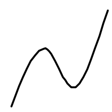
$f'(x) = 1{,}5x^2 - 3$

$f''(x) = 3x$

$f'''(x) = 3$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty;\, f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty;\, f(x) \to +\infty$



3. KS

4. $S_y(0|4{,}5)$ und für S_x $f(x) = 0$

$0 = 0{,}5x^3 - 3x + 4{,}5 \,|: 0{,}5$

$0 = x^3 + 0x^2 - 6x + 9$ Polynomdivision mit $x_1 = -3$

=> $0 = x^2 - 3x + 3$ p-q ist n.l. , da Wurzel negativ

=> $S_{x1}(-3|0)$ (einzige Nullstelle)

5. $f'(x) = 0$

$0 = 1{,}5x^2 - 3 \,|+ 3$

$3 = 1{,}5x^2 \,|: 1{,}5$

$2 = x^2 \,|\sqrt{}$

$x_1 = 1{,}4$ und $x_2 = -1{,}4$

$f'(x) = 0 \;\wedge\; f''(x) \neq 0$

$f''(1{,}4) = 4{,}2 > 0 \Rightarrow T$

$f''(-1{,}4) = -4{,}2 < 0 \Rightarrow H$

$f(1{,}4) = 1{,}7$ => $T(1{,}4|1{,}7)$

$f(-1{,}4) = 7{,}3$ => $H(-1{,}4|7{,}3)$

6. $f''(x)=0$

$0=3x$

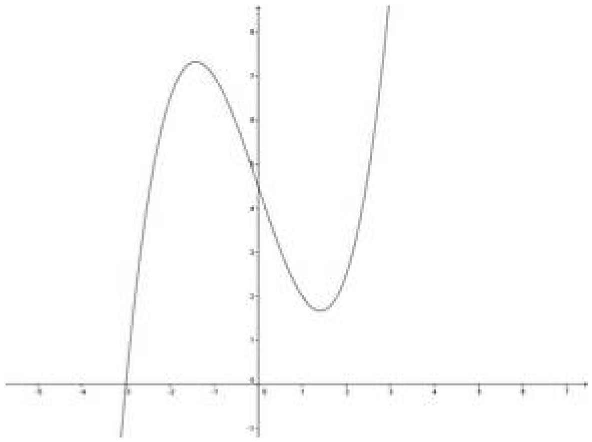
$x=0$

$f''(x)=0 \ \wedge \ f'''(x)\neq 0$

$f'''(0)=3>0 \Rightarrow R-L-K$

$f(0)=4{,}5$ => $W_{R-L}(0|4{,}5)$

7. Skizze



b) $f'(x)=m$ und $m=-1{,}5$

$-1{,}5=1{,}5x^2-3$

$x_1=1$ und $x_2=-1$

c) $f'(x)=m$ und $S_{x1}(-3|0)$

$f'(-3)=10{,}5$ also $m=10{,}5$

d) $t(x)=m\cdot x+b$ und $m=10{,}5$ und $S_{x1}(-3|0)$

$0=10{,}5\cdot(-3)+b$

$31{,}5=b$

$t(x)=10{,}5x+31{,}5$

e) $t(x)=f(x)$

$10{,}5x+31{,}5=0{,}5x^3-3x+4{,}5$

$0=0{,}5x^3-13{,}5x-27|:0{,}5$

$0=x^3-27x-54$

Polynomdivision mit $x_1=-3$ (Tangentenstelle)

$0=x^2-3x-18$

p-q ergibt $x_2=6$ und $x_3=-3$ (Tangente)

$t(6)=94{,}5$ => $S_3(6|94{,}5)$

<u>3. Aufgabe</u>

a) $f(x)=2x^3-12x^2+9x+6$

$f'(x)=6x^2-24x+9$

$f''(x)=12x-24$

5. $f'(x)=0$

$0=6x^2-24x+9|:6$

$0=x^2-4x+1{,}5$

p-q liefert

$x_1=3{,}6$ und $x_2=0{,}4$

$f'(x)=0 \ \wedge \ f''(x)\neq 0$

$f''(3{,}6)=19{,}2>0\Rightarrow T$

$f''(0{,}4)=-19{,}2<0\Rightarrow H$

$f(3{,}6)=-23{,}8$ => $T(3{,}6|-23{,}8)$

$f(0{,}4)=7{,}8$ => $H(0{,}4|7{,}8)$

b) $t(x)=f(x)$

$39x+22=2x^3-12x^2+9x+6 \mid -39x-22$

$0=2x^3-12x^2-30x-16 \mid :2$

$0=x^3-6x^2-15x-8$

Polynomdivision mit $x_1=-1$ ergibt

$0=x^2-7x-8$ p-q liefert

$x_2=8$ und $x_3=-1$

Da die Stelle $x=-1$ doppelt vorkommt, liegt hier die Tangente an.

=> $f(-1)=-17$ also $S_{1/2}(-1|-17)$

c) Wendetangente = Tangente im Wendepunkt

$f'(x)=6x^2-24x+9$

$f''(x)=12x-24$

$f'''(x)=12$

$f''(x)=0$

$0=12x-24$

$x=2$

$f''(x)=0 \ \wedge \ f'''(x)\neq 0$

$f'''(2)=12>0 \Rightarrow R-L-K$

$f(2)=-8$ => $W_{R-L}(2|-8)$

$f'(x)=m$ also $f'(2)=-15$ einsetzen in t(x) ergibt $b=22$ => $t(x)=-15x+22$

d) $g(x)=f(x)$

$-x+6=2x^3-12x^2+9x+6 \mid +x-6$

$0=2x^3-12x^2+10x \mid :2$

$0=x^3-6x^2+5x$

x ausklammern ergibt $x_1=0$ und

$0=x^2-6x+5$ p-q liefert

$x_2=5$ und $x_3=1$

Da hier alle Schnittpunkte gesucht sind, müssen auch alle y-Werte berechnet werden.

$f(0)=6$ $f(5)=1$ $f(1)=5$ $S_1(0|6)$ $S_2(5|1)$ $S_3(1|5)$

4. Aufgabe

a) Hier muss man erst den linken Wendepunkt berechnen, dann die Tangente ermitteln und am Ende den Abstand als Differenz berechnen.

$f(x)=2{,}5x^4-15x^2+32{,}5$

$f'(x)=10x^3-30x$

$f''(x)=30x^2-30$

$f'''(x)=60x$

$f''(x)=0$

$0=30x^2-30 \mid +30$

$30=30x^2 \mid :30 \mid \sqrt{\ }$

$(x_1=1)$ und $x_2=-1$

$f''(x)=0 \ \wedge \ f'''(x)\neq 0$

$f'''(-1)=-60<0 \Rightarrow L-R-K$

$f(-1)=20$ => $W_{L-R}(-1|20)$

$f'(x)=m$ also $f'(-1)=20$

$t(x)=m\cdot x+b$

Durch Einsetzen ergibt sich $b=40$ also $t(x)=20x+40$.

Der Abstand ist das Stück zwischen Tangente und Kurve auf der y-Achse!

Die Funktion f(x) hat auf der y-Achse den Wert 32,5 und die Tangente 40.

$40-32{,}5=7{,}5$ Der Abstand beträgt 7,5m.

b) Der tangential zurückgelegte Weg ist eine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks.
Die längste Seite muss mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.
Die Seite in x-Richtung beträgt 1, die Seite in y-Richtung beträgt 20.
(Wendepunkt $(-1|20)$ und $S_y(0|40)$ der Tangente benutzen)

$a^2+b^2=c^2$

$1^2+20^2=c^2$

$401=c^2 \mid \sqrt{\ }$

$20=c$ Der tangential zurückgelegte Weg beträgt 20m.