

Lösungen F 18

1. Aufgabe

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

berührt die x-Achse = Nullstelle und Extrempunkt

Angaben

$$S_x(-2|0)$$

$$x = -2; m = 0$$

$$W(-1|-1)$$

$$x = -1; K = 0$$

Mathematisierung

$$f(-2) = 0$$

$$f'(-2) = 0$$

$$f(-1) = -1$$

$$f'(-1) = 0$$

Gleichungen

$$I \quad -8a + 4b - 2c + d = 0$$

$$II \quad 12a - 4b + c = 0$$

$$III \quad -a + b - c + d = -1$$

$$IV \quad -6a + 2b = 0$$

b) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Angaben

$$S_x(-2|0)$$

$$x = -2; m = 0$$

$$H(-1|3)$$

$$x = -1; m = 0$$

$$S_x(1|0)$$

Mathematisierung

$$f(-2) = 0$$

$$f'(-2) = 0$$

$$f(-1) = 3$$

$$f'(-1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Gleichungen

$$I \quad 16a - 8b + 4c - 2d + e = 0$$

$$II \quad -32a + 12b - 4c + d = 0$$

$$III \quad a - b + c - d + e = 3$$

$$IV \quad -4a + 3b - 2c + d = 0$$

$$V \quad a + b + c + d + e = 0$$

c) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Angaben

$$x = 3; m = 0$$

$$S_x(5|0)$$

$$P(-1|2)$$

$$x = -1; m = -0,5$$

Mathematisierung

$$f(3) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f(-1) = 2$$

$$f'(-1) = -0,5$$

Gleichungen

$$I \quad 27a + 6b + c = 0$$

$$II \quad 125a + 25b + 5c + d = 0$$

$$III \quad -a + b - c + d = 2$$

$$IV \quad 3a - 2b + c = -0,5$$

d) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Wenn $t(x)$ gegeben ist, kann man damit den zugehörigen y -Wert ausrechnen: $t(3) = 5$. Dieser Punkt ist dann der doppelte Schnittpunkt der Tangente mit der Funktion.

Die y -Achse hat den x -Wert null. $x = 0$

Angaben

$$S_{1/2}(3|5)$$

$$x = 3; m = 2$$

$$P(-1|4)$$

$$x = -1; m = -2$$

$$x = 0; m = 0$$

Mathematisierung

$$f(3) = 5$$

$$f'(3) = 2$$

$$f(-1) = 4$$

$$f'(-1) = -2$$

$$f'(0) = 0$$

Gleichungen

$$I \quad 81a + 27b + 9c + 3d + e = 5$$

$$II \quad 108a + 27b + 6c + d = 2$$

$$III \quad a - b + c - d + e = 4$$

$$IV \quad -4a + 3b - 2c + d = -2$$

$$V \quad d = 0$$

e) **PS** $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$
 $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$
 $f''(x) = 20ax^3 + 6bx$

Ein Sattelpunkt hat die Steigung $m = 0$ und ist auch ein Wendepunkt.

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
Sattelp(2 1)	$f(2) = 1$	I $32a + 8b + 2c = 1$
$x = 2; m = 0$	$f'(2) = 0$	II $80a + 12b + c = 0$
$x = 2; K = 0$	$f''(2) = 0$	III $160a + 12b = 0$

f) **AS** $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
 $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$
 $f''(x) = 12ax^2 + 2b$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
W(-3 2)	$f(-3) = 2$	I $81a + 9b + c = 2$
$x = -3; K = 0$	$f''(-3) = 0$	II $108a + 2b = 0$
$x = -3; m = -2$	$f'(-3) = -2$	III $-108a - 6b = -2$

2. Aufgabe

a) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
 $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
 $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
Sattelp(0 0)	$f(0) = 0$	I $e = 0$
$x = 0; m = 0$	$f'(0) = 0$	II $d = 0$
$x = 0; K = 0$	$f''(0) = 0$	III $2c = 0 \Rightarrow c = 0$
$S_x(2 0)$	$f(2) = 0$	IV $16a + 8b + 4c + 2d + e = 0$
$x = 1; m = 2$	$f'(1) = 2$	V $4a + 3b + 2c + d = 2$

Die Variablen c, d und e sind gleich null und fallen deshalb weg. Dies vereinfacht das Gleichungssystem auf:

$$0 = 16a + 8b$$

$$2 = 4a + 3b$$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man:

$$X = a = -1 \text{ und } Y = b = 2$$

Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$$f(x) = -x^4 + 2x^3$$

(Überprüft man die einzelnen Angaben mit dieser Gleichung, kann man die Richtigkeit der Rechnung bestätigen.)

b) $f(x) = ax^3 + bx$
PS $f'(x) = 3ax^2 + b$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>	
$P(1 -8)$	$f(1) = -8$	I $a + b = -8$	b einsetzen in I ergibt:
$x = 0 \quad m = -9$	$f'(0) = -9$	II $b = -9$	$a = 1$

(Der Ursprung als Punkt selbst kann hier nicht verwendet werden, da dann nur $0 = 0$ herauskommt.)

Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

c) $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
AS $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
$S_y(0 4)$	$f(0) = 4$	I $c = 4$
$S_x(1 0)$	$f(1) = 0$	II $a + b + c = 0$
$x = 1; m = -6$	$f'(1) = -6$	III $4a + 2b = -6$

Ist der Wert einer oder mehrerer Variablen bereits bekannt, setzt man diese in die anderen Gleichungen ein.

Einsetzen von c in II ergibt:

II $a + b + 4 = 0 \quad | -4$ $a + b = -4$
 III $4a + 2b = -6$ $4a + 2b = -6$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man:

$$X = a = 1 \quad \text{und} \quad Y = b = -5$$

Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

d) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
 $f''(x) = 6ax + 2b$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
$x = 2 \quad m = -6$	$f'(2) = -6$	I $12a + 4b + c = -6$
$W(0 -1)$	$f(0) = -1$	II $d = -1$
$x = 0; K = 0$	$f''(0) = 0$	III $2b = 0 \Rightarrow b = 0$
$x = 0; m = 6$	$f'(0) = 6$	IV $c = 6$

b und c einsetzen in I ergibt:

$$12a + 4 \cdot 0 + 6 = -6 \Rightarrow a = -1$$

Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$$f(x) = -x^3 + 6x - 1$$

e) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
O(0 0)	$f(0) = 0$	I $d = 0$
$x = 0; m = 0$	$f'(0) = 0$	II $c = 0$
P(-3 0)	$f(-3) = 0$	III $-27a + 9b - 3c + d = 0$
$x = -3; m = 9$	$f'(-3) = 9$	IV $27a - 6b + c = 9$

Die Variablen c und d sind gleich null und fallen deshalb weg. Dies vereinfacht das Gleichungssystem auf:

I $-27a + 9b = 0$
 II $27a - 6b = 9$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man:

$X = a = 1$ und $Y = b = 3$

Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$f(x) = x^3 + 3x^2$

f) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
 $f''(x) = 6ax + 2b$

waagrechte Tangente = Steigung null

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
$S_x(4 0)$	$f(4) = 0$	I $64a + 16b + 4c + d = 0$
$x = 4; m = 0$	$f'(4) = 0$	II $48a + 8b + c = 0$
W(0 3)	$f(0) = 3$	III $d = 3$
$x = 0; K = 0$	$f''(0) = 0$	IV $2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Einsetzen von b und d in I und II ergibt:

I $64a + 4c + 3 = 0 \mid -3$ $64a + 4c = -3$
 II $48a + c = 0$ $48a + c = 0$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man:

$X = a = \frac{3}{128}$ und $Y = c = -\frac{9}{8}$

Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$f(x) = \frac{3}{128}x^3 - \frac{9}{8}x + 3$