Lösungen F 16 BW

1. Aufgabe

$f(x) = -0{,}2x^3 + 0{,}6x^2 + 1{,}8x + 3218$

a) $f'(x) = -0{,}6x^2 + 1{,}2x + 1{,}8$

$f''(x) = -1{,}2x + 1{,}2$

$f'(x) = 0$

$0 = -0{,}6x^2 + 1{,}2x + 1{,}8 \quad |: (-0{,}6)$

mit p-q ergibt sich $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$

$0 = x^2 - 2x - 3$

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(3) = -2{,}4 < 0 \Rightarrow H$

Max. gesucht: $f(3) = 3223{,}4$

$f''(-1) = 2{,}4 > 0 \Rightarrow T$

Am Ende von 2003 lag die maximale Bevölkerungsdichte mit 3223,4 vor.

b) $f(10) = 3096$ Im Jahr 2010 liegt die Bevölkerungsdichte bei 3096.

c) größte Änderungsrate = Wendepunkt

$f''(x) = -1{,}2x + 1{,}2$

$f'''(x) = -1{,}2$

$f''(x) = 0$

$0 = -1{,}2x + 1{,}2$

$x = 1$

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(1) = -1{,}2 < 0 \Rightarrow L - R - K$

Am Ende von 2001 stieg die Bevölkerungsdichte am stärksten.

d) $f(x) = 3168{,}4$

$3168{,}4 = -0{,}2x^3 + 0{,}6x^2 + 1{,}8x + 3218$

$0 = -0{,}2x^3 + 0{,}6x^2 + 1{,}8x + 49{,}6$

$0 = x^3 - 3x^2 - 9x - 248$

Polynomdivision mit $x_1 = 8$ ergibt: $x^2 + 5x + 31$

p-q-Formel liefert: $x_{2/3} = \text{n.l.}$

Eine Bevölkerungsdichte von 3168,4 lag Ende des Jahres 2008 vor.

2. Aufgabe

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$S_y(0 \mid -2)$	$f(0) = -2$	I	$d = -2$
$x = 0$; $K = 0$	$f''(0) = 0$	II	$2b = 0 \Rightarrow b = 0$
$P(3 \mid -20)$	$f(3) = -20$	III	$27a + 9b + 3c + d = -20$
$x = 3$; $m = -24$	$f'(3) = -24$	IV	$27a + 6b + c = -24$

Die Variablen b und d einsetzen ergibt:

$$27a + 3c - 2 = -20 \,|\, +2 \qquad 27a + 3c = -18$$
$$27a + c = -24 \qquad 27a + c = -24$$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR, Modus 5 EQN, Variante 1 erhält man:

$X = a = -1$ und $Y = c = 3$

Setzt man alle Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$f(x) = -x^3 + 3x - 2$

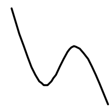
b) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

$f'(x) = -3x^2 + 3$

$f''(x) = -6x$

$f'''(x) = -6$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty; f(x) \to -\infty$



3. KS

4. $S_y(0|-2)$ und für S_x $f(x) = 0$

$0 = -x^3 + 3x - 2 \,|\, :(-1)$

$0 = x^3 + 0x^2 - 3x + 2$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$

=> $0 = x^2 + x - 2$ p-q ergibt $x_2 = 1$ und $x_3 = -2$

$S_{x1/2}(1|0)$ und $S_{x3}(-2|0)$

5. $f'(x) = 0$

$0 = -3x^2 + 3 \,|\, :(-3)$

$0 = x^2 - 1$

Wurzel ziehen ergibt:

$x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow H$

$f''(-1) = +6 > 0 \Rightarrow T$

$f(1) = 0$ => $H(1|0)$

$f(-1) = -4$ => $T(-1|-4)$

6. $f''(x) = 0$

$0 = -6x$

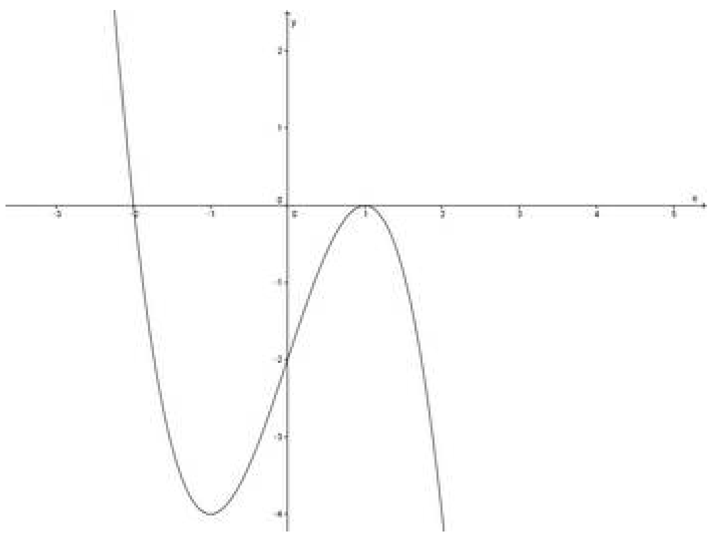
$x = 0$

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(0) = -6 < 0 \Rightarrow L - R - K$

$f(0) = -2$ => $W_{L-R}(0|-2)$

7. Skizze



c) $S_{x3}(-2|0)$ und $S_y(0|-2)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{-2-0}{0-(-2)}=-1$$

Da S_y das b angibt: $g(x)=-x-2$

oder: $g(x)=ax+b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$S_x(-2\|0)$	$g(-2)=0$	I $-2a+b=0$
$S_y(0\|-2)$	$g(0)=-2$	II $b=-2$

Durch einsetzen von b ergibt sich: $a=-1$

=> $g(x)=-x-2$

d) $W_{L-R}(0|-2)$

$f'(x)=-3x^2+3$

$f'(0)=+3 \qquad m=3$

$y=m\cdot x+b$

$-2=3\cdot 0+b \qquad \Rightarrow t(x)=3x-2$

$b=-2$

<u>3. Aufgabe</u>

AS $\quad f(x)=ax^4+bx^2+c$

$\quad f'(x)=4ax^3+2bx$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$S_y(0\|0)$	$f(0)=0$	I $\quad c=0$
$H(-1\|5)$	$f(-1)=5$	II $\quad a+b+c=5$
$x=-1; m=0$	$f'(-1)=0$	III $\quad -4a-2b=0$

II $\quad a+b=5$

III $\quad -4a-2b=0$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR, Modus 5 EQN, Variante 1 erhält man:

$X=a=-5$ und $Y=b=10$

Setzt man die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung ein, ergibt sich:

$f(x)=-5x^4+10x^2$

<u>4. Aufgabe</u>

Wendepunkte

$f(x)=-x^4+2x^3$

$f'(x)=-4x^3+6x^2$

$f''(x)=-12x^2+12x \qquad f''(x)=0$

$f'''(x)=-24x+12$

$0=-12x^2+12x \;|:(-12)$

$0=x^2-x$

$0=x(x-1)$

$x_1=0 \qquad x_2=1$

Da $x_1=0$ nicht zum Definitionsbereich $[0{,}5;+2]$ gehört, kann man diese Lösung weglassen.

$f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$

$f'''(1)=-12<0 \Rightarrow L-R-K$

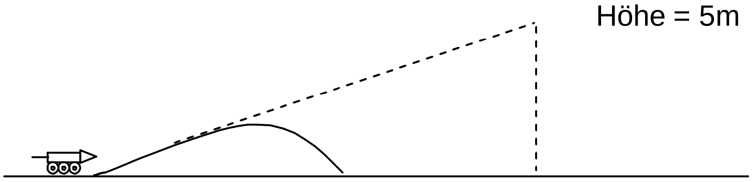
$f(1)=1 \qquad W_{L-R}(1|1)$

Tangente: $t(x) = m \cdot x + b$

$f'(x) = m$ einsetzen $1 = 2 \cdot 1 + b$ => $t(x) = 2x - 1$

$f'(1) = 2$ $b = -1$

Höhe = 5m



1 = Stelle des Abhebens x = Stelle mit Höhe 5 m

Die Höhe 5m ist der y-Wert für die Tangente, also $t(x) = 5$

$5 = 2x - 1$ $3 - 1 = 2$ => Die Rakete hat 2 m nach dem Abheben die Höhe 5 m.

$x = 3$