Lösungen F 16

<u>1. Aufgabe</u>

1. Definitionsbereich
2. Verlauf der Funktion
3. Symmetrie
4. S_x / S_y
5. Extrempunkte
6. Wendepunkte
7. Zeichnung

$f(x) = 0{,}05x^4 - x^2 + 3{,}2$

a) $f'(x) = 0{,}2x^3 - 2x$ Am besten zuerst die Ableitungen bilden!

$f''(x) = 0{,}6x^2 - 2$

$f'''(x) = 1{,}2x$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty; f(x) \to +\infty$  **3.** AS **4.** $S_y(0|3{,}2)$

$f(x) = 0$

$0 = 0{,}05x^4 - x^2 + 3{,}2 \quad |: 0{,}05$

$0 = x^4 - 20x^2 + 64$

Substitution mit $x^2 = z$ also $0 = z^2 - 20z + 64$

Lösen mit p-q liefert $z_1 = 16$ und $z_2 = 4$

Resubstitution mit $z = x^2$ => $x^2 = 16$ und $x^2 = 4$

Wurzel ziehen ergibt: $x_1 = 4$ $x_2 = -4$ $x_3 = 2$ $x_4 = -2$

$S_{x1}(4|0)$ $S_{x2}(-4|0)$ $S_{x3}(2|0)$ $S_{x4}(-2|0)$

5. Extrempunkte

1. Schritt $f'(x) = 0$

$0 = 0{,}2x^3 - 2x \quad |: 0{,}2$

$0 = x^3 - 10x$

x ausklammern ergibt: $x_1 = 0$ und

$0 = x^2 - 10 \quad |+10$

$10 = x^2 \quad |\sqrt{\ }$

$x_2 = 3{,}2$

$x_3 = -3{,}2$

2. Schritt $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(0) = -2 < 0$ => Hochpunkt

$f''(3{,}2) = 4{,}1 > 0$ => Tiefpunkt

$f''(-3{,}2) = 4{,}1 > 0$ => Tiefpunkt

3. Schritt

$f(0) = 3{,}2$ $H(0|3{,}2)$

$f(3{,}2) = -1{,}8$ $T(3{,}2|-1{,}8)$

$f(-3{,}2) = -1{,}8$ $T(-3{,}2|-1{,}8)$

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x) = 0$

$0 = 0{,}6x^2 - 2 \quad |: 0{,}6$

$0 = x^2 - \frac{10}{3} \quad \left|+\frac{10}{3}\right.$

$\frac{10}{3} = x^2 \quad |\sqrt{\ }$

$x_1 = 1{,}8$ V $x_2 = -1{,}8$

2. Schritt $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(1{,}8) = 2{,}2 > 0$ R – L – K

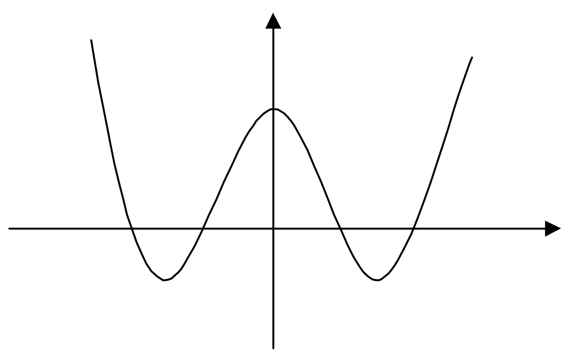
$f'''(-1{,}8) = -2{,}2 < 0$ L – R – K

3. Schritt

$f(1{,}8) = 0{,}5$ $W_{R-L}(1{,}8|0{,}5)$

$f(-1{,}8) = 0{,}5$ $W_{L-R}(-1{,}8|0{,}5)$

7. Zeichnung



b) größte Nullstelle: $x = 4$ bzw. $S_x(4|0)$

$f'(x) = m$ mit $f'(x) = 0{,}2x^3 - 2x$

$f'(4) = 4{,}8$

$t(x) = m \cdot x + b$

alle Werte (x,y,m) einsetzen und b berechnen

$0 = 4{,}8 \cdot 4 + b$

$b = -19{,}2$

$t(x) = 4{,}8x - 19{,}2$

c) $\tan(\alpha) = m$

$\tan^{-1}(m) = \alpha$

$\tan^{-1}(4{,}8) = \alpha$

$\alpha = 78{,}2°$

d) $m = 4{,}8$

$f'(x) = m$

$4{,}8 = 0{,}2x^3 - 2x \quad | -4{,}8$

$0 = 0{,}2x^3 - 2x - 4{,}8 \quad | : 0{,}2$

$0 = x^3 - 10x - 24$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ (Tangentenstelle mit Steigung 4,8)

$(x^3 + 0x^2 - 10x - 24) : (x - 4) = x^2 + 4x + 6$

Die p-q-Formel $x_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4 - 6}$ ist unter der Wurzel negativ und ergibt somit keine weiteren Lösungen.

Es gibt nur eine Stelle (x = 4) mit der Steigung 4,8.

e) $t(x) = f(x)$

$4{,}8x - 19{,}2 = 0{,}05x^4 - x^2 + 3{,}2$

$0 = 0{,}05x^4 - x^2 - 4{,}8x + 22{,}4$

$0 = x^4 - 20x^2 - 96x + 448$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ da hier die Tangente anliegt

$(x^4 + 0x^3 - 20x^2 - 96x + 448) : (x - 4) = x^3 + 4x^2 - 4x - 112$

weitere Polynomdivision mit $x_2 = 4$ da Tangente doppelte Lösung

$(x^3 + 4x^2 - 4x - 112) : (x - 4) = x^2 + 8x + 28$

p-q-Formel $x_{3/4} = -4 \pm \sqrt{16 - 28}$ Wurzel negativ, also
keine weiteren Schnittpunkte => nur Tangentenstelle (4l0)

f) $n(x) = m \cdot x + b$

$m_2 = \frac{-1}{m_1}$ => $m_2 = \frac{-1}{4{,}8} = -\frac{5}{24}$ Punkt $(4|0)$ bleibt gleich

$0 = -\frac{5}{24} \cdot 4 + b$ => $b = -\frac{5}{6}$ => $n(x) = -\frac{5}{24}x - \frac{5}{6}$

2. Aufgabe

a)

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$

$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$

$f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

$f'''(x) = \frac{3}{4}$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

3. KS **4**. $S_y(0|4)$

$f(x) = 0$

$0 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4 \quad \Big| : \frac{1}{8}$

$0 = x^3 - 6x^2 + 0x + 32$

Polynomdivision $x_1 = -2$ ergibt $x^2 - 8x + 16 = 0$

p-q-Formel liefert $x_{2/3} = 4$

$S_{x1}(-2|0) \quad S_{x2/3}(4|0)$

5. Extrempunkte

1. Schritt $f'(x) = 0$

$$0 = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x \,\Big|\, : \frac{3}{8}$$

$0 = x^2 - 4x$ x ausklammern ergibt: $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$

$0 = x(x-4)$

2. Schritt $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$ 3. Schritt

$f''(0) = -1{,}5 < 0 \Rightarrow H$ $f(0) = 4$ $H(0|4)$

$f''(4) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow T$ $f(4) = 0$ $T(4|0)$

6. Wendepunkte

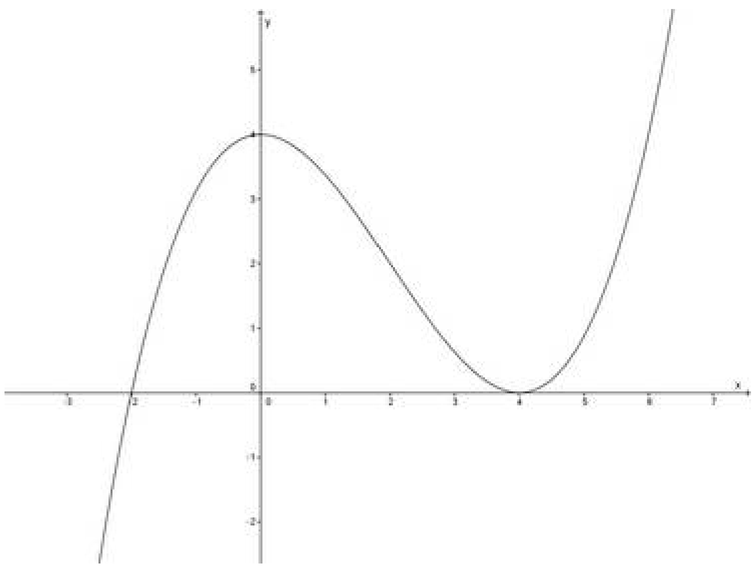
1. Schritt $f''(x) = 0$ 2. Schritt $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ 3. Schritt

$$0 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \,\Big|\, : \frac{3}{4}$$

$0 = x - 2$ $f'''(2) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow R-L-K$ $f(2) = 2$ $W_{R-L}(2|2)$

$x = 2$

7. Zeichnung



b)

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$ $f''(x) = 4x + 4$

$f'(x) = 2x^2 + 4x$ $f'''(x) = 4$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$; $x \to +\infty; f(x) \to +\infty$  **3**. KS **4**. $S_y(0|0)$

$f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \,\Big|\, : \frac{2}{3}$$

$0 = x^3 + 3x^2$ x^2 ausklammern ergibt $x_{1/2} = 0$ und $x_3 = -3$

$S_{x1/2}(0|0)$ $S_{x3}(-3|0)$

5. Extrempunkte

1. Schritt $f'(x) = 0$

$0 = 2x^2 + 4x \,|: 2$

$0 = x^2 + 2x$ x ausklammern ergibt: $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$

$0 = x(x+2)$

2. Schritt $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow T$

$f''(-2) = -4 < 0 \Rightarrow H$

3. Schritt

$f(0) = 0$ $T(0|0)$

$f(-2) = 2{,}7$ $H(-2|2{,}7)$

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x) = 0$

$0 = 4x + 4 \,|: 4$

$0 = x + 1$

$x = -1$

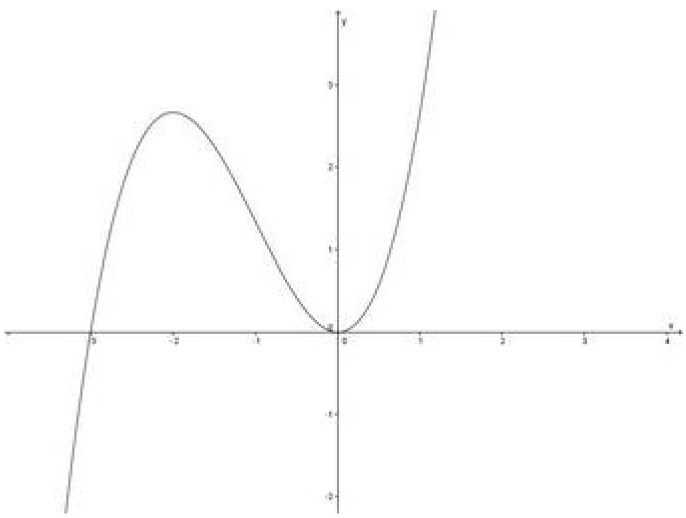
2. Schritt $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(-1) = 4 > 0 \Rightarrow R-L-K$

3. Schritt

$f(-1) = 1{,}3$ $W_{R-L}(-1|1{,}3)$

7. Zeichnung



c)

$f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 6x - 4$

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 6$

$f''(x) = 3x - 6$

$f'''(x) = 3$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$  **3**. KS **4**. $S_y(0|-4)$

$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

$f(x) = 0$

$0 = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 6x - 4 \,|: 0{,}5$

$0 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Polynomdivision mit $x_1 = 2$ ergibt $x^2 - 4x + 4 = 0$

p-q-Formel liefert $x_{2/3} = 2$

$S_{x1/2/3}(2|0)$

5. Extrempunkte

1. Schritt $f'(x) = 0$

$0 = 1{,}5x^2 - 6x + 6 \,|\, : 1{,}5$

$0 = x^2 - 4x + 4$

p-q-Formel ergibt: $x_{1/2} = 2$

2. Schritt $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(2) = 0 = 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

3. Schritt

$f(2) = 0$ $\quad$ $Sp(2|0)$

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x) = 0$

$0 = 3x - 6$

$x = 2$

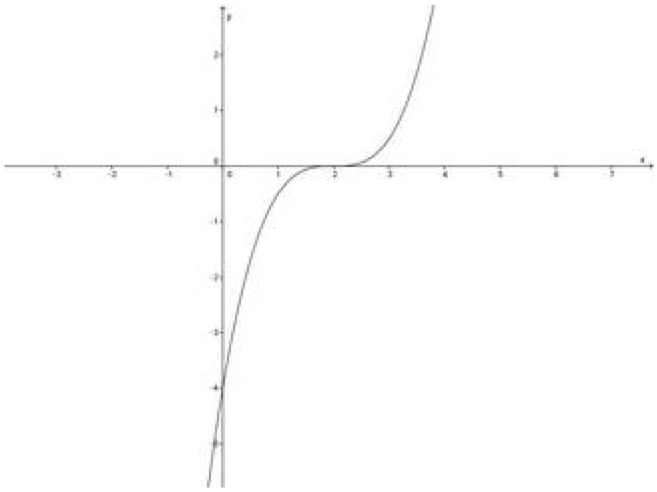
2. Schritt $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(2) = 3 > 0 \Rightarrow R - L - K$

3. Schritt

$f(2) = 0$ $\quad$ $W_{R-L}(2|0)$

7. Zeichnung



d)

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$

$f'(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

$f''(x) = 3x^2 + 8x + 4$

$f'''(x) = 6x + 8$

1. $D = R$ $\quad$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty; f(x) \to +\infty$ $\quad$ **3**. KS $\quad$ **4**. $S_y(0|0)$

$f(x) = 0$

$0 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \quad \Big| : \frac{1}{4}$

$0 = x^4 + \frac{16}{3}x^3 + 8x^2$

x^2 ausklammern ergibt $x_{1/2} = 0$ und $x^2 + \frac{16}{3}x + 8 = 0$

p-q-Formel liefert $x_{3/4} =$ n.l.

$S_{1/2}(0|0)$

5. Extrempunkte

1. Schritt $f'(x) = 0$

$0 = x^3 + 4x^2 + 4x$

x ausklammern ergibt: $x_1 = 0$ und $x^2 + 4x + 4 = 0$

p-q-Formel ergibt: $x_{2/3} = -2$

2. Schritt $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow T$

$f''(-2) = 0 = 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

3. Schritt

$f(0) = 0$ $\quad T(0|0)$

$f(-2) = 1{,}3$ $\quad Sp(-2|1{,}3)$

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x) = 0$

$0 = 3x^2 + 8x + 4 \,|\, : 3$

$0 = x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}$

$x_{1/2} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}}$

$x_1 = -0{,}7 \vee x_2 = -2$

2. Schritt $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(-0{,}7) = 3{,}8 > 0 \Rightarrow R-L-K$

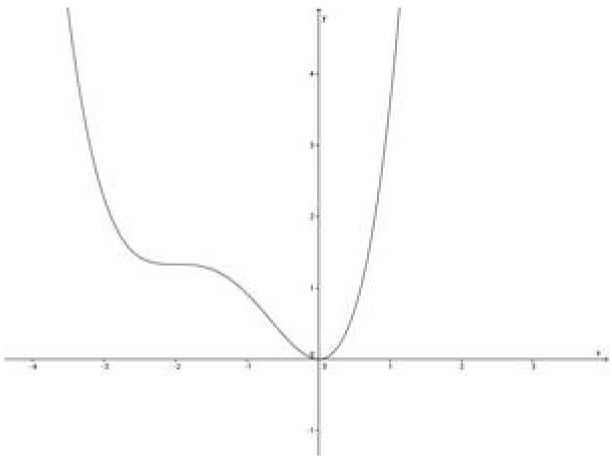
$f'''(-2) = -4 < 0 \Rightarrow L-R-K$

3. Schritt

$f(-0{,}7) = 0{,}6$ $\quad W_{R-L}(-0{,}7|0{,}6)$

$f(-2) = 1{,}3$ $\quad W_{L-R}(-2|1{,}3)$

7. Zeichnung



<u>3. Aufgabe</u>

Funktion f(x) und Stelle $x = 1$ sind gegeben, Tangente erstellen, weiteren Schnittpunkt ermitteln

$f(x) = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 8 \quad x = 1 \quad f(1) = 6{,}75$ y-Wert

$f'(x) = 0{,}75x^2 - 3x \quad x = 1 \quad f'(1) = -2{,}25$ m

$t(x) = m \cdot x + b$

$6{,}75 = -2{,}25 \cdot 1 + b$

$9 = b$

=> $t(x) = -2{,}25x + 9$

$t(x) = f(x)$

$-2{,}25x + 9 = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 8 \quad | + 2{,}25x - 9$

$0 = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 2{,}25x - 1 \quad | : 0{,}25$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 - 5x + 4$

$0 = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

p-q-Formel liefert $x_2 = 4$ und $x_3 = 1$

Die Stelle x = 1 ist doppelte Lösung, also Tangente.
Die Stelle x = 4 liefert den gesuchten Punkt.

$f(4) = 0 \quad P(4|0)$

Im Punkt $P(4|0)$ trifft der Stein wieder auf die Straße.

(Es ist beabsichtigt, dass die Skizze nicht mit dem berechneten Wert übereinstimmt, sonst wäre man versucht, einfach die Nullstellen zu berechnen.)