Lösungen D t13

1. Aufgabe

1. $D = R$

2. 

3. KS

4. $S_y(0|3)$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + 3$$
$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$
$$f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$
$$f'''(x) = \frac{3}{4}$$

$f(x) = 0$

$0 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + 3 \Big| : \frac{1}{8}$

$0 = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$ führt zu

$0 = x^2 - x - 12$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 4$ V $x_3 = -3$

$S_{x1}(2|0)$ $S_{x2}(4|0)$ $S_{x3}(-3|0)$

5. Extrempunkte

$f'(x) = 0$

$0 = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \Big| : \frac{3}{8}$

$0 = x^2 - 2x - \frac{10}{3}$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + \frac{10}{3}}$

$x_1 = 3{,}08$ V $x_2 = -1{,}08$

$f'(x) = 0 \ \wedge \ f''(x) \neq 0$

$f''(3{,}08) = 1{,}56 > 0 \Rightarrow T$

$f''(-1{,}08) = -1{,}56 < 0 \Rightarrow H$

$f(3{,}08) = -0{,}76$ $T(3{,}08|-0{,}76)$

$f(-1{,}08) = 3{,}76$ $H(-1{,}08|3{,}76)$

6. Wendepunkte

$f''(x) = 0$

$0 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

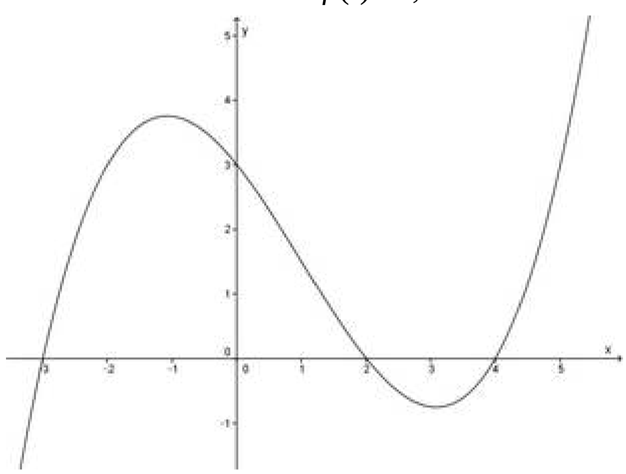
$x = 1$

$f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

$f'''(1) = 0{,}75 > 0 \Rightarrow R - L - K$

$f(1) = 1{,}5$ $W_{R-L}(1|1{,}5)$

7. Zeichnung



2. Aufgabe

a)

Hier muss man zuerst die Stellen (x-Werte) suchen, die eine Steigung von 6 haben. Mit Steigungen arbeitet man immer in der ersten Ableitung.

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

$f'(x) = 2x^2 + 4x$

$f'(x) = m$

$m = 6$

$6 = 2x^2 + 4x$

$0 = 2x^2 + 4x - 6$

$0 = x^2 + 2x - 3$ p-q Formel

$x_1 = 1$ V $x_2 = -3$

$f(1) = \frac{8}{3}$ (y-Wert)

$m = 6$

$f(-3) = 0$ (y-Wert)

$m = 6$

Einsetzen in die allgemeine Tangentengleichung $t(x) = m \cdot x + b$ ergibt:

$\frac{8}{3} = 6 \cdot 1 + b$

$b = -\frac{10}{3}$

$t_1(x) = 6x - \frac{10}{3}$

$0 = 6 \cdot (-3) + b$

$b = 18$

$t_2(x) = 6x + 18$

b)

Schnittpunkte berechnet man durch Gleichsetzen der beiden Funktionen.

$t_1(x) = f(x)$

$6x - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + \frac{10}{3} \Big| : \frac{2}{3}$

$0 = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

$t_2(x) = f(x)$

$6x + 18 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x - 18 \Big| : \frac{2}{3}$

$0 = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$

Die Polynomdivision erfolgt mit der Stelle als Teiler, an der die Tangente anliegt.

$x_1 = 1 \Rightarrow 0 = x^2 + 4x - 5$ (p-q-Formel)

$x_2 = 1$ V $x_3 = -5$

$x_1 = -3 \Rightarrow 0 = x^2 - 9$ (Wurzel ziehen)

$x_2 = -3$ V $x_3 = 3$

Die doppelte Lösung ist die Berührstelle (Tangentenstelle), die einfache Lösung ergibt den gesuchten Schnittpunkt.

$f(-5) = -33{,}33$

$S_3(-5|-33{,}33)$

$f(3) = 36$

$S_3(3|36)$

3. Aufgabe

a) $f'(x) = x^3 - 2x$

$f'(1) = -1$

$f(1) = -2$

$t(x) = m \cdot x + b$

$-2 = -1 \cdot 1 + b$

$b = -1$

=> $t_1(x) = -x - 1$

$f'(-1) = 1$

$f(-1) = -2$

$t(x) = m \cdot x + b$

$-2 = 1 \cdot (-1) + b$

$b = -1$

=> $t_2(x) = x - 1$

b) Da beide Tangenten den gleichen y-Achsenabschnitt (S_y) besitzen, schneiden sie sich dort. $S(0|-1)$

c) $t_1(x) = f(x)$

$-x - 1 = 0{,}25x^4 - x^2 - 1{,}25 \quad |+x+1$

$0 = 0{,}25x^4 + 0x^3 - x^2 + x - 0{,}25 \quad |:0{,}25$ $\qquad +0x^3$ einfügen wegen Polynomdivision

$0 = x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

Hier müssen zwei Polynomdivisionen durchgeführt werden, um eine quadratische Gleichung zu erhalten.
Die Teiler sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$, da eine Tangente eine doppelte Lösung liefert.
$S_{1/2}(1|-2)$
Nach der ersten Polynomdivision erhält man: $0 = x^3 + x^2 - 3x + 1$
Nach der zweiten Polynomdivision: $0 = x^2 + 2x - 1$
Aus p-q ergibt sich: $x_3 = 0{,}4$ und $x_4 = -2{,}4$

$t_1(0{,}4) = -1{,}4 \qquad S_3(0{,}4|-1{,}4)$
$t_1(-2{,}4) = 1{,}4 \qquad S_4(-2{,}4|1{,}4)$

Berechnet man die y-Werte in f(x), ergeben sich kleine Abweichungen, da die x-Werte gerundet wurden.

Da die Funktion Achsensymmetrie aufweist, kann man die beiden Schnittpunkte an der y-Achse spiegeln, indem man nur die Vorzeichen der x-Werte ändert. Für $t_2(x)$ gilt also:
$S_3(-0{,}4|-1{,}4)$
$S_4(+2{,}4|1{,}4)$
und natürlich $S_{1/2}(-1|-2)$

4. Aufgabe

1. Möglichkeit
$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist für jeden x-Wert der y-Wert 4. Man erhält den vollständigen Punkt (2l4). Durch Einsetzten in f(x) erhält man a.

$f(x) = ax^3 + 3x$

$4 = a \cdot 2^3 + 3 \cdot 2$

$4 = 8a + 6$

$-2 = 8a$

$-0{,}25 = a$

2. Möglichkeit
$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist die Steigung $m = 0$. Bildet man die erste Ableitung und setzt x-Wert und Steigung ein, erhält man a.

$f'(x) = 3ax^2 + 3$

$0 = 3a \cdot 2^2 + 3$

$0 = 12a + 3$

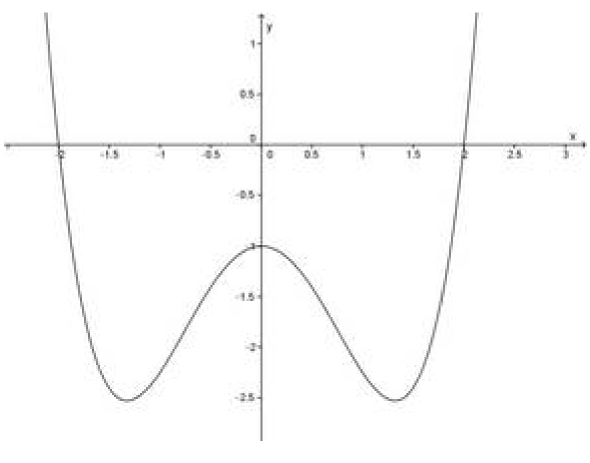
$-3 = 12a$

$-0{,}25 = a$

Die Funktionsgleichung lautet in beiden Fällen: $f(x) = -0{,}25x^3 + 3x$.

5. Aufgabe

a)



b)
Der Graph der Funktion:
- ist achsensymmetrisch
- kommt von oben und geht nach oben $+x^4$
- hat nur zwei Nullstellen
- besitzt den Hochpunkt auf der y-Achse bei -1

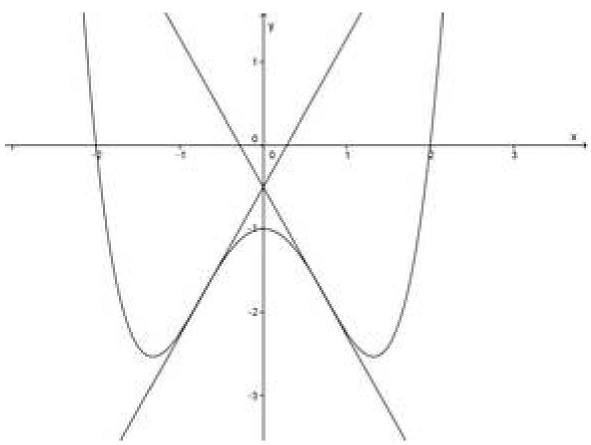
c)
$f(x) = ax^4 - \frac{7}{4}x^2 + c$
„schneidet die y-Achse bei -1“ $\Rightarrow c = -1$
$f(x) = ax^4 - \frac{7}{4}x^2 - 1$
$T(1{,}3|-2{,}5)$ ist Punkt des Graphen => einsetzen
$-2{,}5 = a \cdot 1{,}3^4 - \frac{7}{4} \cdot 1{,}3^2 - 1$
$a \approx 0{,}5$ Die beiden Werte des Punktes waren gerundet.
$f(x) = 0{,}5x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 1$

d)
$f(x) = 0$
$0 = 0{,}5x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 1 \,|: 0{,}5$
$0 = x^4 - 3{,}5x^2 - 2$
$x^2 = z$
$0 = z^2 - 3{,}5z - 2$
p-q-Formel liefert
$z_1 = 4 \lor z_2 = -0{,}5$

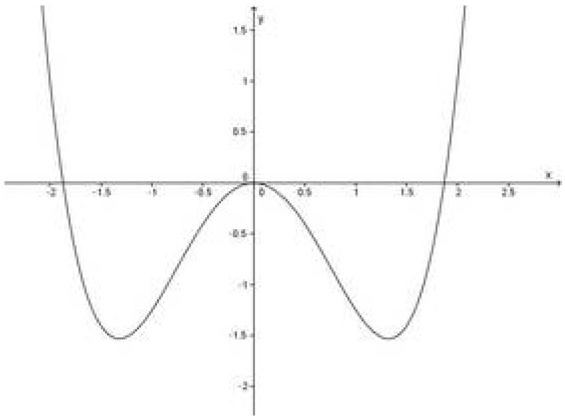
$z = x^2$
$x^2 = 4$
$x_1 = 2 \lor x_2 = -2$
$S_{x1}(2|0) \quad S_{x2}(-2|0)$

$x^2 = -0{,}5$
$\Rightarrow n.l.$

e)
Zeichnet man die beiden Wendetangenten in das Schaubild von f(x) ein, so ergibt aus der Achsensymmetrie heraus der Schnittpunkt auf der y-Achse.
Die Tangenten unterscheiden sich nur im Vorzeichen der Steigung.



f)
Entfällt die Konstante c, so verläuft der Graph durch den Ursprung und besitzt dort eine doppelte Nullstelle (Berührpunkt; in diesem Fall Hochpunkt).



g)

$h(x) = 0{,}5x^4 - \frac{7}{4}x^2$

$h(x) = 0$

$0 = 0{,}5x^4 - \frac{7}{4}x^2 \,|\!: 0{,}5$

$0 = x^4 - 3{,}5x^2$

$0 = x^2(x^2 - 3{,}5)$

$x_{1/2} = 0 \;\vee\; x_3 = 1{,}87 \;\vee\; x_4 = -1{,}87$

$S_{x1/2}(0|0) \quad S_{x3}(1{,}87|0) \quad S_{x4}(-1{,}87|0)$

h)

$h(x) = 0{,}5x^4 - \frac{7}{4}x^2$

$h'(x) = 2x^3 - 3{,}5x$

$h'(-2) = -9$

$m = -9$

i)

$m = -1{,}5$

$f'(x) = m$

$-1{,}5 = 2x^3 - 3{,}5x$

$0 = 2x^3 - 3{,}5x + 1{,}5 \,|\cdot 2$ Konstante auf glatte Zahl bringen, zur besseren Teilersuche

$0 = 4x^3 + 0x^2 - 7x + 3$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt

$0 = 4x^2 + 4x - 3 \,|\!: 4$

$0 = x^2 + x - 0{,}75$ p-q-Formel liefert $x_2 = 0{,}5 \;\vee\; x_3 = -1{,}5$