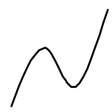
Lösungen D 16 BW

1. Aufgabe

a) $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ **1.** $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$; $x \to +\infty; f(x) \to +\infty$



3. KS

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 6$

$f''(x) = 3x - 6$

$f'''(x) = 3$

4. $S_y(0|-4)$ und für S_x $f(x) = 0$

$0 = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 6x - 4 \,|: 0{,}5$

$0 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$

=> $0 = x^2 - 4x + 4$ p-q ergibt $x_{2/3} = 2$

=> $S_{x1/2/3}(2|0)$ (dreifache Nullstelle heißt Sattelpunkt.)

5. $f'(x) = 0$

$0 = 1{,}5x^2 - 6x + 6 \,|: 1{,}5$

$0 = x^2 - 4x + 4$

p-q ergibt $x_{1/2} = 2$

$f'(x) = 0 \;\wedge\; f''(x) \neq 0$

$f''(2) = 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$f(2) = 0$ => $Sp(2|0)$

6. $f''(x) = 0$

$0 = 3x - 6$

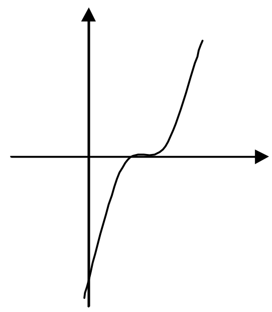
$x = 2$

$f''(x) = 0 \;\wedge\; f'''(x) \neq 0$

$f'''(2) = 3 > 0 \Rightarrow R - L - K$

$f(2) = 0$ => $W_{R-L}(2|0)$

7. Skizze



b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$ **1.** $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$; $x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

3. KS

$f'(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

$f''(x) = 3x^2 + 8x + 4$

$f'''(x) = 6x + 8$

4. $S_y(0|0)$ und für S_x $f(x) = 0$

$0 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \,\Big|: \frac{1}{4}$

$0 = x^4 + \frac{16}{3}x^3 + 8x^2$ ausklammern von x^2 führt zu $x_{1/2} = 0$

$0 = x^2 + \frac{16}{3}x + 8$ p-q ergibt keine weitere Lösung, da Wurzel negativ => $S_{x1/2}(0|0)$

(doppelte Nullstelle => Extrempunkt)

5. $f'(x) = 0$

$0 = x^3 + 4x^2 + 4x$

Ausklammern von x => $x_1 = 0$

$0 = x^2 + 4x + 4$

p-q ergibt $x_{2/3} = -2$

$f'(x) = 0 \;\wedge\; f''(x) \neq 0$

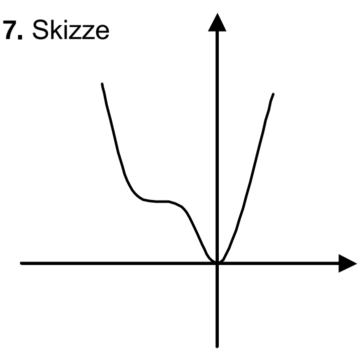
$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow T$

$f''(-2) = 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$f(0) = 0$ => $T(0|0)$

$f(-2) = 0$ => $Sp(-2|0)$

7. Skizze



6. $f''(x) = 0$

$0 = 3x^2 + 8x + 4 \,|: 3$

$0 = x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}$

p-q ergibt $x_1 = -\frac{2}{3}$ und $x_2 = -2$

$f''(x) = 0 \;\wedge\; f'''(x) \neq 0$

$f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 4 > 0 \Rightarrow R - L - K$

$f'''(-2) = -4 < 0 \Rightarrow L - R - K$

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0{,}5$ => $W_{R-L}\left(-\frac{2}{3}\middle|0{,}5\right)$ oder $W_{R-L}(-0{,}7|0{,}6)$

$f(-2) = \frac{4}{3}$ => $W_{L-R}\left(-2\middle|\frac{4}{3}\right)$ oder $W_{L-R}(-2|1{,}3)$

2. Aufgabe

a) $t(x) = f(x)$

$39x + 22 = 2x^3 - 12x^2 + 9x + 6 \,|\, -39x - 22$ Polynomdivision mit $x_1 = -1$ ergibt

$0 = 2x^3 - 12x^2 - 30x - 16 \,|\, :2$ $0 = x^2 - 7x - 8$ p-q liefert

$0 = x^3 - 6x^2 - 15x - 8$ $x_2 = 8$ und $x_3 = -1$

Da die Stelle $x = -1$ doppelt vorkommt (doppelter Schnittpunkt = Berührpunkt), liegt hier die Tangente an.

=> $f(-1) = -17$ also $S_{1/2}(-1|-17)$

b) Wendetangente = Tangente im Wendepunkt

$f'(x) = 6x^2 - 24x + 9$ $f''(x) = 0$ $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f''(x) = 12x - 24$ $0 = 12x - 24$ $f'''(2) = 12 > 0 \Rightarrow R - L - K$

$f'''(x) = 12$ $x = 2$ $f(2) = -8$ => $W_{R-L}(2|-8)$

$f'(x) = m$ also $f'(2) = -15$ einsetzen in t(x) ergibt $b = 22$ => $t(x) = -15x + 22$

c) $g(x) = f(x)$

$-x + 6 = 2x^3 - 12x^2 + 9x + 6 \,|\, +x - 6$ x ausklammern ergibt $x_1 = 0$ und

$0 = 2x^3 - 12x^2 + 10x \,|\, :2$ $0 = x^2 - 6x + 5$ p-q liefert

$0 = x^3 - 6x^2 + 5x$ $x_2 = 5$ und $x_3 = 1$

Da hier alle Schnittpunkte gesucht sind, müssen auch alle y-Werte berechnet werden.

$f(0) = 6$ $f(5) = 1$ $f(1) = 5$ $S_1(0|6)$ $S_2(5|1)$ $S_3(1|5)$

3. Aufgabe

a) Zu Beginn = Zeitpunkt null => t=0 also $f(0) = 38{,}4$

Der Patient hatte zu Beginn eine Temperatur von 38,4°C.

b) Temperatur am höchsten = Hochpunkt; Zeitpunkt = t (also x-Wert)

$f(t) = -0{,}1t^4 + 0{,}8t^2 + 38{,}4$ $f'(t) = 0$

$f'(t) = -0{,}4t^3 + 1{,}6t$ $0 = -0{,}4t^3 + 1{,}6t \,|\, :(-0{,}4)$

$f''(t) = -1{,}2t^2 + 1{,}6$ $0 = t^3 - 4t$

t ausklammern ergibt $t_1 = 0$ und $t^2 = 4$ also $t_2 = 2$ und $t_3 = -2$

Da der Wert -2 nicht im Definitionsbereich enthalten ist, wird er nicht weiter untersucht. Man schreibt: $t_3 = -2 \notin D$

$f'(t) = 0 \wedge f''(t) \neq 0$

$f''(0) = 1{,}6 > 0$ Tiefpunkt

$f''(2) = -3{,}2 < 0$ Hochpunkt

Nach zwei Tagen ist die Temperatur am höchsten.

c) Der stärkste Anstieg liegt im Wendepunkt.

$f(t) = -0{,}1t^4 + 0{,}8t^2 + 38{,}4$ $f''(t) = 0$

$f'(t) = -0{,}4t^3 + 1{,}6t$ $0 = -1{,}2t^2 + 1{,}6 \,|\, +1{,}2t^2$

$f''(t) = -1{,}2t^2 + 1{,}6$ $1{,}2t^2 = 1{,}6 \,|\, :1{,}2$

$f'''(t) = -2{,}4t$ $t^2 = \frac{4}{3} \,|\, \sqrt{\;}$

$t_1 = 1{,}2$ und $t_2 = -1{,}2$ Der Wert -2 ist nicht im Definitionsbereich enthalten und wird nicht weiter untersucht. Man schreibt: $t_2 = -1{,}2 \notin D$

$f''(t) = 0 \wedge f'''(t) \neq 0$

$f'''(1{,}2) = -2{,}88 < 0 \Rightarrow L - R - K$

Der y-Wert ist hier nicht vonnöten.

Im Laufe des zweiten Tags stieg die Temperatur am stärksten

d) Temperaturangabe = y-Wert also $f(t) = 37{,}5$

$37{,}5 = -0{,}1t^4 + 0{,}8t^2 + 38{,}4 \quad | -37{,}5$

$0 = -0{,}1t^4 + 0{,}8t^2 + 0{,}9 \quad | : (-0{,}1)$ Substitution mit $t^2 = z$ und p-q ergibt $z_1 = 9$ und $z_2 = -1$

$0 = t^4 - 8t^2 - 9$

Resubstitution mit $z = t^2$ und Wurzel ziehen führt nur zu zwei Lösungen, wobei die negative nicht im Definitionsbereich enthalten ist.

. $t_1 = 3 \quad t_2 = -3 \notin D$

Der Patient hat nach drei Tagen, wieder die Temperatur von 37,5°C.

<u>4. Aufgabe</u>

a) Hier muss man erst den linken Wendepunkt berechnen, dann die Tangente ermitteln und am Ende den Abstand als Differenz berechnen.

$f(x) = 2{,}5x^4 - 15x^2 + 32{,}5$	$f''(x) = 0$	$f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$
$f'(x) = 10x^3 - 30x$	$0 = 30x^2 - 30 \, | +30$	$f'''(-1) = -60 < 0 \Rightarrow L - R - K$
$f''(x) = 30x^2 - 30$	$30 = 30x^2 \, | : 30 \, | \sqrt{\ }$	$f(-1) = 20$ => $W_{L-R}(-1 \mid 20)$
$f'''(x) = 60x$	$x_1 = 1 \notin D$ und $x_2 = -1$	

$f'(x) = m$ also $f'(-1) = 20$

$t(x) = m \cdot x + b$

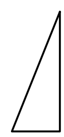
Durch Einsetzen ergibt sich $b = 40$ also $t(x) = 20x + 40$.

Der Abstand ist das Stück zwischen Tangente und Kurve auf der y-Achse!

Die Funktion f(x) hat auf der y-Achse den Wert 32,5 und die Tangente 40.

$40 - 32{,}5 = 7{,}5$ Der Abstand beträgt 7,5m.

b) Der tangential zurückgelegte Weg ist die lange Seite eines rechtwinkligen Dreiecks.
Die längste Seite muss mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.
Die Seite in x-Richtung beträgt 1, die Seite in y-Richtung beträgt 20.
(Wendepunkt $(-1 \mid 20)$ und $S_y(0 \mid 40)$ der Tangente benutzen)



$a^2 + b^2 = c^2$

$1^2 + 20^2 = c^2$

$401 = c^2 \, | \sqrt{\ }$

$20 = c$ Der tangential zurückgelegte Weg beträgt 20m.