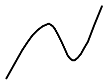
Lösungen C 17

<u>1. Aufgabe</u>

a) $f(x) = 0{,}25x^3 - 0{,}75x^2 - 1{,}5x + 2$

1. Definitionsbereich: $D = R$

2. Verlauf: $\begin{matrix} x \to -\infty; f(x) \to -\infty \\ x \to +\infty; f(x) \to +\infty \end{matrix}$ (Der Graph kommt von unten und geht nach oben.)



3. keine Symmetrie (KS), da gerade und ungerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$x = 0 \qquad f(0) = 2 \qquad S_y(0|2)$

$f(x_N) = 0$

$0 = 0{,}25x^3 - 0{,}75x^2 - 1{,}5x + 2 \,|: 0{,}25$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \qquad x_{N1} = -2$

entweder Polynomdivision:

$x_{N1} = -2$

$$\begin{array}{l} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x + 2) = x^2 - 5x + 4 \\ \underline{-(x^3 + 2x^2)} \\ \quad -5x^2 - 6x \\ \underline{\quad -(-5x^2 - 10x)} \\ \qquad 4x + 8 \\ \underline{\qquad -(4x + 8)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

oder Horner-Schema:

	x^3	x^2	x^1	x^0	
	1	-3	-6	8	
$x_{N1} = -2$	0	1	-5	4	0

$x^2 - 5x + 4 = 0$

im Anschluss jeweils pq-Formel

$x_{N2/3} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4}$

$x_{N2} = 4$

$x_{N3} = 1 \qquad S_{x1}(-2|0) \quad S_{x2}(4|0) \quad S_{x3}(1|0)$

Ableitungen

$f'(x) = 0{,}75x^2 - 1{,}5x - 1{,}5$

$f''(x) = 1{,}5x - 1{,}5$

$f'''(x) = 1{,}5$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = 0{,}75x^2 - 1{,}5x - 1{,}5 \,|: 0{,}75$

$0 = x^2 - 2x - 2$

$0 = 1 \pm \sqrt{1 + 2}$

$x_{E1} \approx 2{,}73$

$x_{E2} \approx -0{,}73$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(2{,}73) \approx 2{,}6 > 0 \Rightarrow T$

$f''(-0{,}73) \approx -2{,}60 < 0 \Rightarrow H$

3. Schritt

$f(2{,}73) \approx -2{,}60 \qquad T(2{,}73|-2{,}60)$

$f(-0{,}73) \approx 2{,}60 \qquad H(-0{,}73|2{,}60)$

$M_1 =]-\infty; -0{,}73]$ monoton steigend

$M_2 = [-0{,}73; 2{,}73]$ monoton fallend

$M_3 = [2{,}73; +\infty[$ monoton steigend

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = 1{,}5x - 1{,}5$

$1 = x_W$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

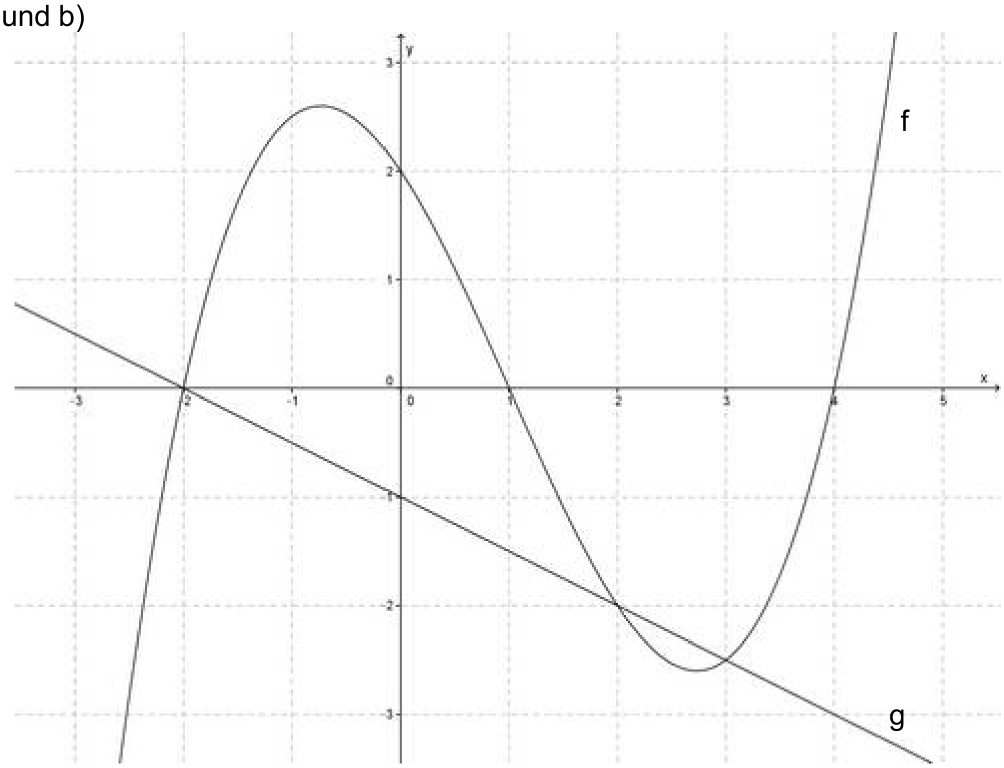
$f'''(1) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow R - L - K$

3. Schritt

$f(1) = 0 \qquad W_{R-L}(1|0)$

7. Zeichnung

a) und b)



c) $S_1(-2|0) \quad S_2(2|-2) \quad S_3(3|-2{,}5)$

d)

$f(x) = g(x)$

$0{,}25x^3 - 0{,}75x^2 - 1{,}5x + 2 = -0{,}5x - 1 \,|+ 0{,}5x + 1$

$0{,}25x^3 - 0{,}75x^2 - 1x + 3 = 0 \,|: 0{,}25$

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ Polynomdivision oder Horner-Schema mit $x_1 = -2$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ pq-Formel liefert $x_2 = 3$ und $x_3 = 2$

y-Werte berechnen

$g(-2) = 0 \qquad S_1(-2|0)$

$g(3) = -2{,}5 \qquad S_1(2|-2)$

$g(2) = -2 \qquad S_1(3|-2{,}5)$

<u>2. Aufgabe</u>

a) $M_1 =]-\infty;1]$ monoton fallend

$M_2 = [1;3]$ monoton steigend

$M_3 = [3;+\infty[$ monoton fallend

b) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ Linearfaktorform

$x_{1/2} = 1$ doppelte Nullstelle

$x_3 = 4$

$S_y(0|2)$

alle Werte einsetzen:

$2 = a(0-1)(0-1)(0-4)$

$2 = -4a \,|: (-4)$

$-0{,}5 = a$

$f(x) = -0{,}5(x-1)(x-1)(x-4)$ Klammern ausmultiplizieren

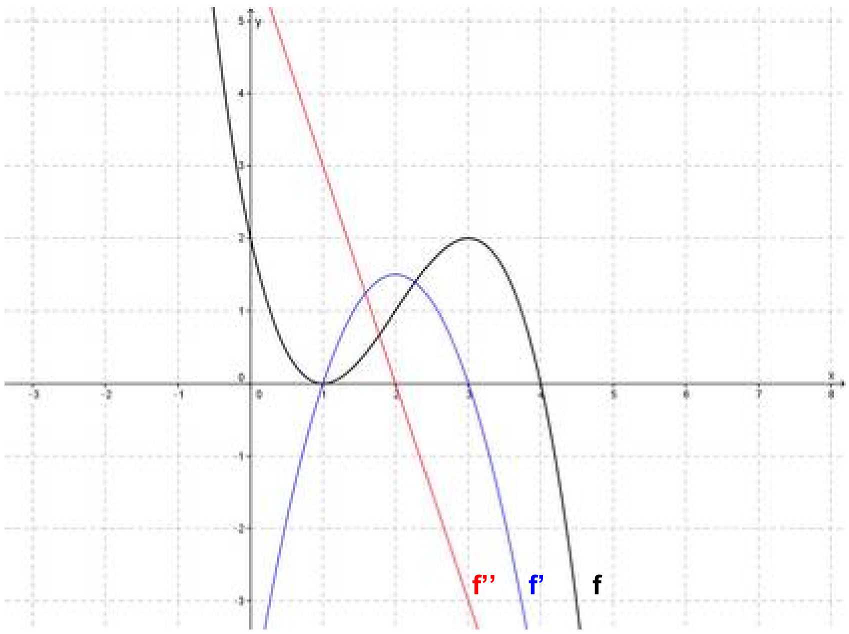
$f(x) = -0{,}5(x^2 - 2x + 1)(x - 4)$

$f(x) = -0{,}5(x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 8x + 1x - 4)$

$f(x) = -0{,}5(x^3 - 6x^2 + 9x - 4)$

$f(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2 - 4{,}5x + 2$

c)



3. Aufgabe

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

$f'(x) = 2x^2 + 4x$

$f''(x) = 4x + 4$

$f'''(x) = 4$

Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = 4x + 4$

$-1 = x_W$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

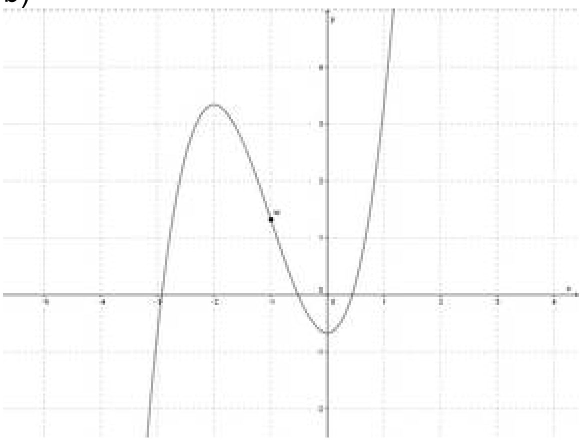
$f'''(-1) = 4 > 0 \Rightarrow R - L - K$

3. Schritt

$f(-1) = \frac{4}{3}$ $\quad W_{R-L}(-1|1{,}33)$

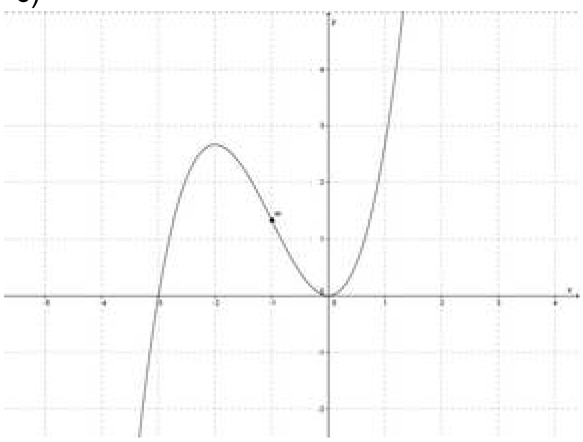
Der Wendepunkt weist einen Rechts-Links-Krümmungswechsel auf. Er liegt zwischen Hochpunkt (Rechtskrümmung) und Tiefpunkt (Linkskrümmung).

b)



Hoch- und Tiefpunkt liegen gleich weit vom Wendepunkt entfernt. (Der Graph ist eine Möglichkeit von vielen.)

c)



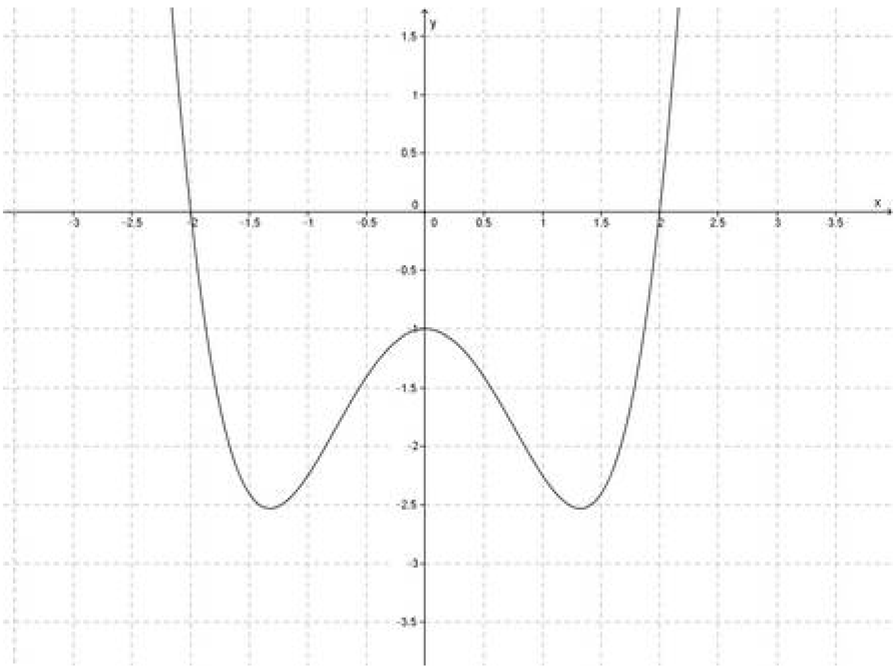
Da im Ursprung eine doppelte Nullstelle vorliegt, muss der Tiefpunkt dort liegen. Somit ändert sich auch die Lage (y-Wert) des Hochpunktes. (Exakter Graph)

<u>4. Aufgabe</u>

a)

Vorüberlegungen:

- achsensymmetrisch, also auch ein Tiefpunkt bei $T(-1{,}3|-2{,}5)$
- achsensymmetrisch, besitzt den Hochpunkt auf der y-Achse bei $H(0|-1)$



b) Der Graph kommt von oben und geht nach oben.

c) $f(x) = ax^4 - 1{,}75x^2 + c$

„schneidet die y-Achse bei -1“ $\Rightarrow c = -1$

$f(x) = ax^4 - 1{,}75x^2 - 1$

$T(1{,}3|-2{,}5)$ ist Punkt des Graphen => einsetzen

$-2{,}5 = a \cdot 1{,}3^4 - 1{,}75 \cdot 1{,}3^2 - 1$

$a \approx 0{,}5$ Die beiden Werte des Punktes waren gerundet.

$f(x) = 0{,}5x^4 - 1{,}75x^2 - 1$

d) $f(x_N) = 0$

$0 = 0{,}5x^4 - 1{,}75x^2 - 1 \,|: 0{,}5$

$0 = x^4 - 3{,}5x^2 - 2$

$x^2 = z$

$0 = z^2 - 3{,}5z - 2$

p-q-Formel liefert

$z_1 = 4$ und $z_2 = -0{,}5$

$z = x^2$

$x^2 = 4 \qquad x^2 = -0{,}5$

$x_1 = 2 \qquad x_{3/4} = \text{n.l.}$

$x_2 = -2$

$S_{x1}(2|0) \quad S_{x2}(-2|0)$