

Lösungen BW D18

1. Aufgabe

a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1$

Schnittpunkte mit den Achsen:

$x = 0 \quad S_y(0|-1)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1$

TR: $x_{N1} = -2; x_{N2} = 1; x_{N3} = 4 \quad S_{x1}(-2|0) \quad S_{x2}(1|0) \quad S_{x3}(4|0)$

$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \quad f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

Extrempunkte:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$ 2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$ 3. Schritt

$0 = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \quad f''(-0,73) \approx 1,30 > 0 \Rightarrow T \quad f(-0,73) \approx -1,30 \quad T(-0,73|-1,30)$
 $\quad \quad \quad f''(2,73) \approx -1,30 < 0 \Rightarrow H \quad f(2,73) \approx 1,30 \quad H(2,73|1,30)$

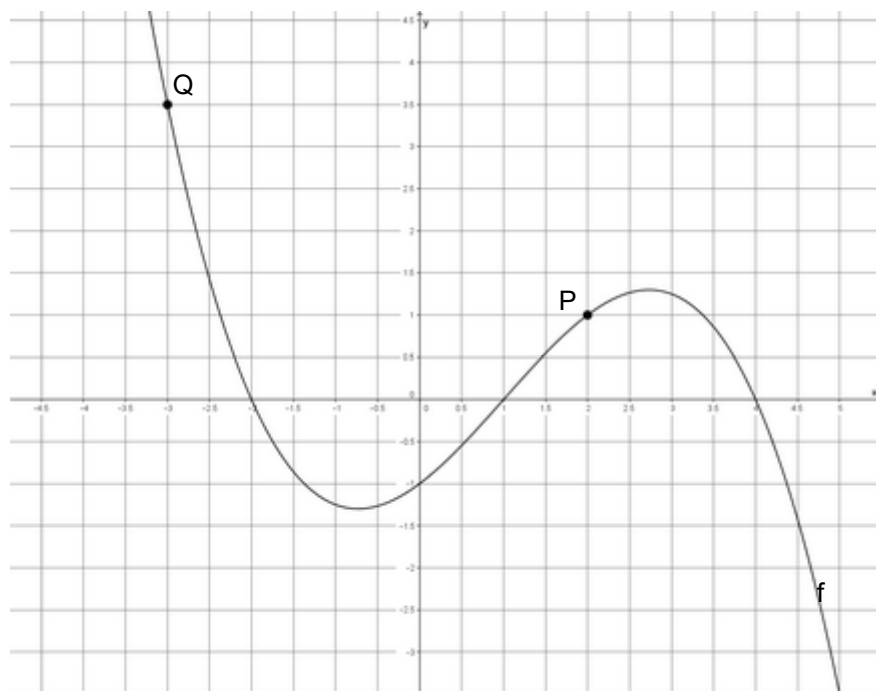
TR: $x_{E1} \approx -0,73; x_{E2} \approx 2,73$

b) $f(2) = 1 \quad P(2|1)$

c) $f(x) = 3,5 \quad 3,5 = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1 \quad | -3,5$

$0 = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 4,5 \quad \text{TR: } x_1 = -3; x_{2/3} = \text{n.l.} \quad Q(-3|3,5)$

d)



e) $f(x) = m$

$$f(0) = \frac{3}{4} \quad m_1 = \frac{3}{4}$$

$$f(2) = \frac{3}{4} \quad m_2 = \frac{3}{4}$$

f) $y = m \cdot x + b$

$$m_1 = \frac{3}{4}$$

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = -1$$

$$-1 = \frac{3}{4} \cdot 0 + b$$

$$b = -1$$

$$t_1(x) = \frac{3}{4}x - 1$$

$$m_2 = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = 2$$

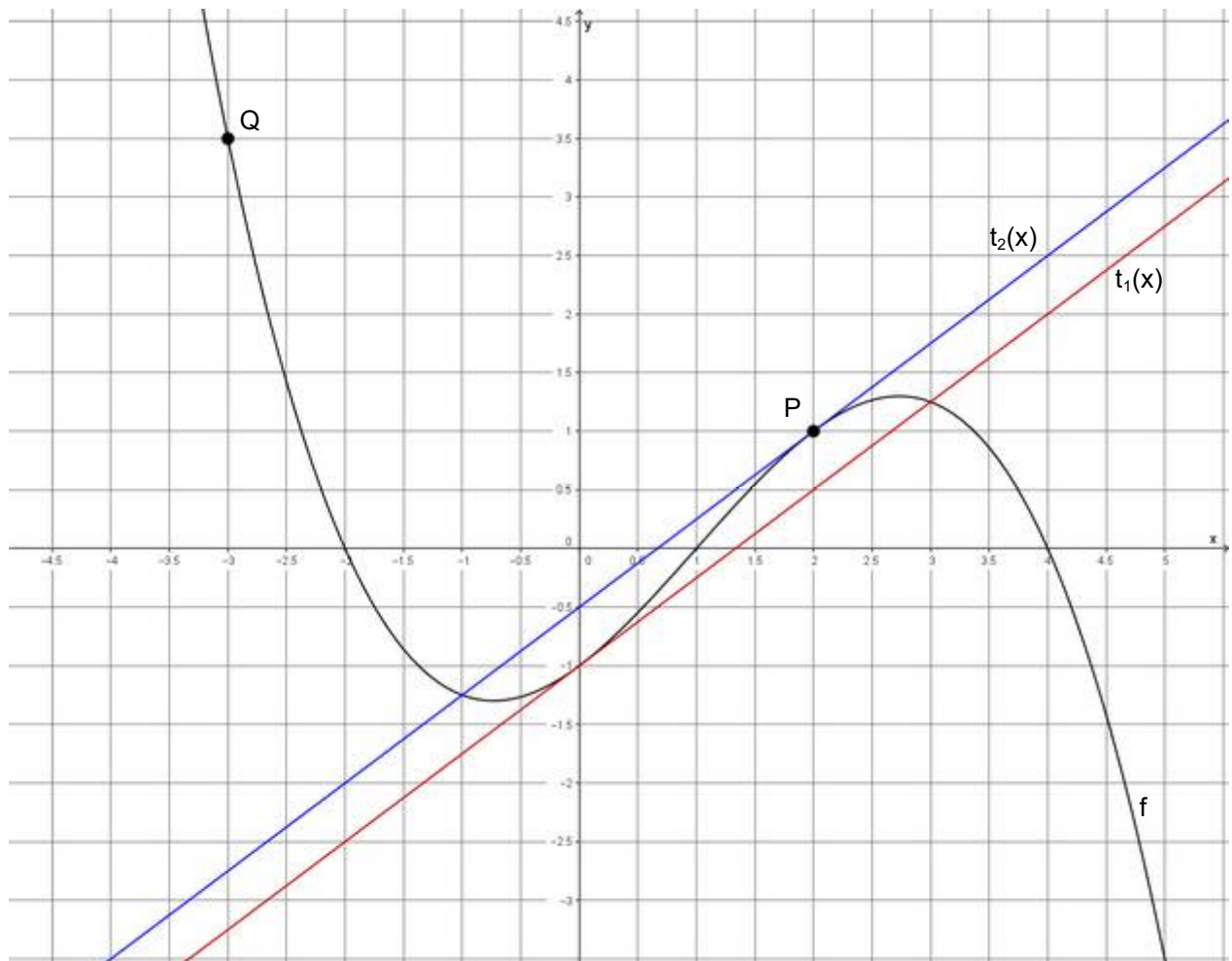
$$y_2 = 1$$

$$1 = \frac{3}{4} \cdot 2 + b$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$t_2(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

g)



2. Aufgabe

a) $f'(x) = m$ $f'(x) = 2x^2 + 4x$ mit $m = 6$ ergibt sich

$$6 = 2x^2 + 4x \quad | -6$$

$$0 = 2x^2 + 4x - 6 \quad | : (2)$$

$$0 = x^2 + 2x - 3 \quad \text{p-q}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$x_1 = 1; x_2 = -3$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -3$$

$$f(1) = \frac{8}{3}$$

$$f(-3) = 0$$

$$t(x) = m \cdot x + b$$

$$t(x) = m \cdot x + b$$

$$\frac{8}{3} = 6 \cdot 1 + b$$

$$0 = 6 \cdot (-3) + b$$

$$b = -\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow t_1(x) = 6x - \frac{10}{3}$$

$$b = 18$$

$$\Rightarrow t_2(x) = 6x + 18$$

b) $\tan(\alpha) = m$

$$\tan^{-1}(m) = \alpha$$

$$\tan^{-1}(0,75) = \alpha$$

$$\alpha = 36,87^\circ$$

c) $t_1(x) = f(x)$

$$6x - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad | -6x + \frac{10}{3}$$

$$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + \frac{10}{3}$$

$$x_{1/2} = 1; x_3 = -5$$

$x = 1$ ist eine doppelte Lösung und somit die Stelle, an der die Tangente anliegt. Da nach dem weiteren Schnittpunkt gefragt ist, muss man die einfache Lösung benutzen.

$$f(-5) = -\frac{100}{3} \quad (\text{und zur Überprüfung } t(-5) = -\frac{100}{3}) \quad \Rightarrow \quad S_3(-5 | -33,3)$$

$$t_2(x) = f(x)$$

$$6x + 18 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad | -6x - 18$$

$$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x - 18$$

$$x_1 = 3; x_{2/3} = -3$$

$x = -3$ ist eine doppelte Lösung, kommt also nicht in Frage; somit

$$f(3) = 36 \quad \Rightarrow \quad S_3(3 | 36) \quad \text{Die Überprüfung in } t(x) \text{ sollte selbstverständlich sein.}$$

3. Aufgabe

- a) Funktion $f(x)$ und Stelle $x = 1$ sind gegeben, Tangente erstellen, weiteren Schnittpunkt ermitteln

$$f(x) = 0,25x^3 - 1,5x^2 + 8 \quad x = 1 \quad f(1) = 6,75 \quad \text{y-Wert}$$

$$f'(x) = 0,75x^2 - 3x \quad x = 1 \quad f'(1) = -2,25 \quad m$$

$$t(x) = m \cdot x + b$$

$$6,75 = -2,25 \cdot 1 + b$$

$$9 = b$$

$$\Rightarrow t(x) = -2,25x + 9$$

$$t(x) = f(x)$$

$$-2,25x + 9 = 0,25x^3 - 1,5x^2 + 8 \quad | +2,25x - 9$$

$$0 = 0,25x^3 - 1,5x^2 + 2,25x - 1$$

$$\text{TR: } x_{1/2} = 1; x_3 = 4$$

Die Stelle $x = 1$ ist doppelte Lösung, also Tangente.

Die Stelle $x = 4$ liefert den gesuchten Punkt.

$$f(4) = 0 \quad P(4|0)$$

Im Punkt $P(4|0)$ trifft der Stein wieder auf die Straße.

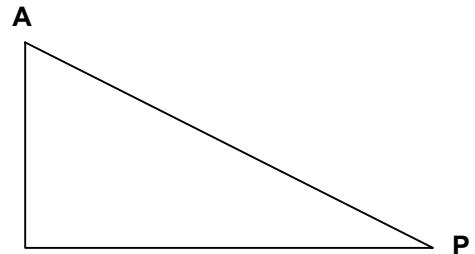
(Es ist beabsichtigt, dass die Skizze nicht mit dem berechneten Wert übereinstimmt, sonst wäre man versucht, einfach die Nullstellen zu berechnen.)

- b) Die Länge der Strecke von A nach P berechnet man mit dem Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ und den Punkten $A(1|6,75)$ und $P(4|0)$.

Im rechtwinkligen Steigungsdreieck arbeitet man mit der Differenz der x- und y-Werte.

$$a = 4 - 1 = 3$$

$$b = 6,75 - 0 = 6,75$$



$$3^2 + 6,75^2 = c^2 \quad \text{oder} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{also} \quad c = \sqrt{3^2 + 6,75^2} \Rightarrow c \approx 7,39 \text{ Längeneinheiten}$$

$$\text{Entfernung} = 7,39 \cdot 5 = 36,95 \approx 37 \text{m}$$

Die Entfernung (Luftlinie) vom Abschusspunkt A zum Auftreffpunkt P beträgt 37 Meter.

c) $f(x) = 0,25x^3 - 1,5x^2 + 8$

1. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

2. Verlauf: $x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow -\infty$
 $x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow +\infty$ (Der Graph kommt von unten und geht nach oben.)



3. keine Symmetrie (KS), da gerade und ungerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$$x = 0 \quad f(0) = 8 \quad S_y(0|8)$$

$$f(x_N) = 0$$

$$0 = 0,25x^3 - 1,5x^2 + 8 \mid : 0,25 \quad (\text{Normalisieren nur, wenn } = 0 \text{ steht})$$

$$0 = x^3 - 6x^2 + 32 \quad \text{Polynomdivision mit } x_{N1} = 4 \text{ (TR)}$$

$$(x^3 - 6x^2 + 0x + 32) : (x - 4) = x^2 - 2x - 8$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 4x^2) \\ \hline \end{array}$$

$$-2x^2 + 0x$$

$$\begin{array}{r} -(-2x^2 + 8x) \\ \hline \end{array}$$

$$-8x + 32$$

$$\begin{array}{r} -(-8x + 32) \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

$$S_{x^{1/2}}(4|0) \quad S_{x^3}(-2|0)$$

$$x_{N2/3} = +1 \pm \sqrt{1+8}$$

pq-Formel

$$x_{N2} = 4$$

$$x_{N3} = -2$$

$$f'(x) = 0,75x^2 - 3x$$

Ableitungen $f''(x) = 1,5x - 3$

$$f'''(x) = 1,5$$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

3. Schritt

$$0 = 0,75x^2 - 3x \mid : 0,75$$

$$f''(0) = -3 < 0 \Rightarrow H$$

$$f(0) = 8$$

$$H(0|8)$$

$$0 = x^2 - 4x$$

$$f''(4) = 3 > 0 \Rightarrow T$$

$$f(4) = 0$$

$$T(4|0)$$

$$0 = x(x - 4)$$

$$x_{E1} = 0$$

$$M_1 =]-\infty; 0] \text{ monoton steigend}$$

$$x_{E2} = 4$$

$$M_2 = [0; 4] \text{ monoton fallend}$$

$$M_3 = [4; +\infty[\text{ monoton steigend}$$

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

3. Schritt

$$0 = 1,5x - 3 \mid + 3 \mid : 1,5$$

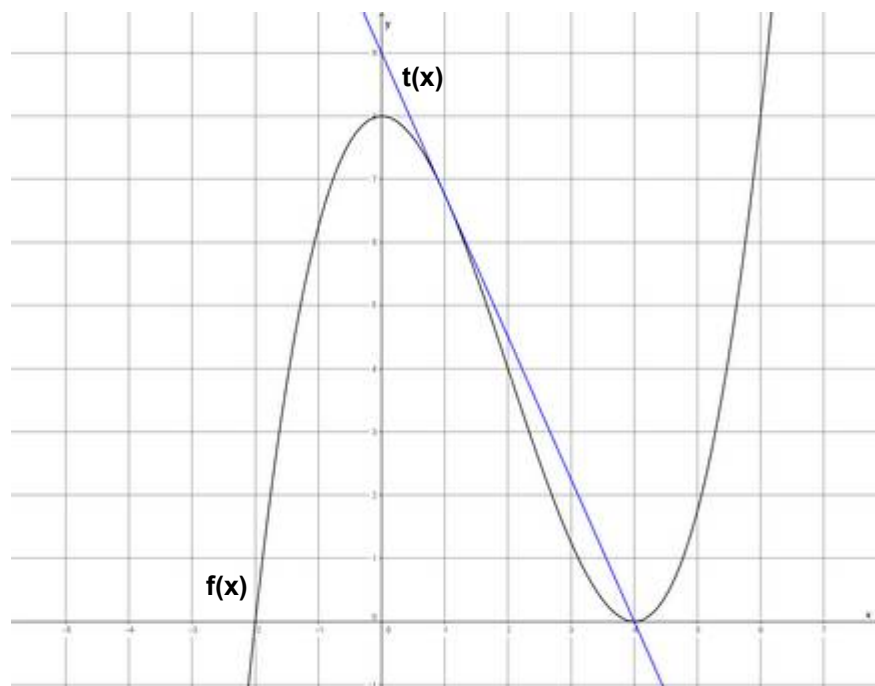
$$f'''(2) = 1,5 > 0 \Rightarrow R-L-K$$

$$f(2) = 4$$

$$W_{R-L}(2|4)$$

$$x_W = 2$$

7. Zeichnung



d) Auftreffpunkt P bei p(x):

$$p(x_N) = 0$$

$$0 = -\frac{1}{500}x^2 + \frac{2}{25}x \quad \left| : \left(-\frac{1}{500} \right) \right.$$

$$0 = x^2 - 40x$$

$$0 = x(x - 40)$$

$$x_{N1} = 0; x_{N2} = 40 \quad P_{\text{neu}}(40|0)$$

Der Auftreffwinkel β ergibt sich aus dem Steigungswinkel der Parabel im Auftreffpunkt.

$$\tan(\alpha) = m \quad \text{und} \quad p'(x) = m$$

$$p(x) = -\frac{1}{500}x^2 + \frac{2}{25}x$$

$$p'(x) = -\frac{1}{250}x + \frac{2}{25}$$

$$p'(40) = -\frac{2}{25} \quad \text{also} \quad m = -\frac{2}{25}$$

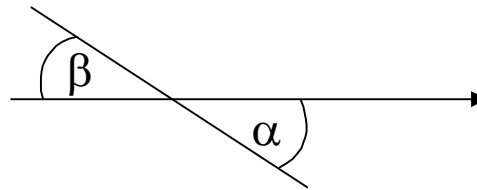
$$\tan^{-1}(m) = \alpha$$

$$\tan^{-1}\left(-\frac{2}{25}\right) = \alpha$$

$$\alpha = -4,57^\circ \quad (\text{negativer Winkel, da fallende Tangente; Winkel unterhalb der x-Achse})$$

$$\beta = 4,57^\circ$$

Der Winkel β beträgt $4,57^\circ$.



e) Die größte Höhe der Flugbahn liegt im Hochpunkt (Scheitelpunkt) der Parabel vor.

$$p(x) = -\frac{1}{500}x^2 + \frac{2}{25}x$$

$$p'(x) = -\frac{1}{250}x + \frac{2}{25}$$

$$p''(x) = -\frac{1}{250}$$

1. Schritt $p'(x_E) = 0$

2. Schritt $p'(x_E) = 0 \wedge p''(x_E) \neq 0$

3. Schritt

$$0 = -\frac{1}{250}x + \frac{2}{25} \quad \left| : \left(-\frac{1}{250} \right) \right.$$

$$p''(20) = -\frac{1}{250} < 0 \Rightarrow H \quad f(20) = 0,8$$

$$H(20|0,8)$$

$$0 = x - 20$$

$$x_E = 20$$

Der Stein erreicht eine größte Höhe von 0,8 Metern.