Lösungen zu Übungsaufgaben G

1. Aufgabe

a) $f(x) = ax^3 + bx$
$f'(x) = 3ax^2 + b$ da PS

$x = -1; m = -1 \Rightarrow f'(-1) = -1$ $\quad -1 = 3a + b$
$x = 2 \quad Nst. \Rightarrow f(2) = 0$ $\quad 0 = 8a + 2b$

Lösung: $f(x) = x^3 - 4x$

b) da PS, nur eine Fläche berechnen und verdoppeln

$$A = \left|\int_0^2 (x^3 - 4x)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_0^2\right| = |[-4] - [0]| = |-4| = 4FE$$

$$A_{ges} = 4FE \cdot 2 = 8FE$$

3. Aufgabe

a) $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ da AS
$f''(x) = 12ax^2 + 2b$

$P(1|0) \Rightarrow f(1) = 0$ $\quad 0 = a + b + c$
$x = 1 \quad Wp \Rightarrow f''(1) = 0$ $\quad 0 = 12a + 2b$ Gleichung ist vorgegeben
$x = 1; m = -4 \Rightarrow f'(1) = -4$ $\quad -4 = 4a + 2b$

b) Nullstellen begrenzen die Fläche des Hochpunkts mit der x-Achse.
Substitution:

$f(x) = 0$

$x^2 = z$

$0 = 0{,}5z^2 - 3z + 2{,}5$

$0 = z^2 - 6z + 5$

$p - q - Formel$

$z_1 = 5 \quad x^2 = 5 \quad x_{1/2} = \pm 2{,}2$

$z_2 = 1 \quad x^2 = 1 \quad x_{3/4} = \pm 1$

$$A = \int_0^1 (0{,}5x^4 - 3x^2 + 2{,}5)dx = [0{,}1x^5 - x^3 + 2{,}5x]_0^1 = [1{,}6] - [0] = 1{,}6FE$$

Da AS Flächeninhalt verdoppeln: $A_{ges} = 1{,}6FE \cdot 2 = 3{,}2FE$

4. Aufgabe

a)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$x = 6 \quad Nst \Rightarrow f(6) = 0$

$P(1|-1) \Rightarrow f(1) = -1$

$O((0|0) \Rightarrow f(0) = 0$

$x = 0 \quad Extr. \Rightarrow f'(0) = 0$

$0 = 216a + 36b + 6c + d$

$-1 = a + b + c + d$

$d = 0$

$c = 0$

$0 = 216a + 36b$

$-1 = a + b$

Lösung: $f(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}2x^2$

b)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$W(0|-1) \Rightarrow f(0) = -1$

$x = 0 \quad Wp \Rightarrow f''(0) = 0$

$x = 0; m = 2 \Rightarrow f'(0) = 2$

$x = 2 \quad Nst. \Rightarrow f(2) = 0$

$x = 2 \quad Extr. \Rightarrow f'(2) = 0$

$e = -1$

$c = 0$

$d = 2$

$0 = 16a + 8b + 4c + 2d + e$

$0 = 32a + 12b + 4c + d$

$0 = 16a + 8b + 4 - 1$

$0 = 32a + 12b + 2$

Zahlen umstellen $\quad -3 = 16a + 8b$

$-2 = 32a + 12b$

Lösung $f(x) = \frac{5}{16}x^4 - x^3 + 2x - 1$

c)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$x = -1 \quad Nst. \Rightarrow f(-1) = 0$

$x = 0; y = 4 \Rightarrow f(0) = 4$

$x = 0 \quad Extr. \Rightarrow f'(0) = 0$

$x = 0 \quad Wp \Rightarrow f''(0) = 0$

$0 = -a + b - c + d$

$d = 4$

$c = 0$

$b = 0$

$0 = -a + 4$

$a = 4$

$f(x) = 4x^3 + 4$

d)
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$T(0|-2) \Rightarrow f(0) = -2$$
$$x = 0 \quad Extr. \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$x = -1;\ m = -1{,}5 \Rightarrow f'(-1) = -1{,}5$$
$$x = 1 \quad Nst. \Rightarrow f(1) = 0$$

$$d = -2$$
$$c = 0$$
$$-1{,}5 = 3a - 2b + c$$
$$0 = a + b + c + d$$

$$-1{,}5 = 3a - 2b$$
$$2 = a + b$$

Lösung: $f(x) = 0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 - 2$

5. Aufgabe
Lösungsweg: erst Fläche von f_1 berechnen, dann Fläche von f_2, dann Differenz bilden

Nst. f_1 gegeben mit 0 und 12

$$A_1 = \int_0^{12} \left(-0{,}3x^2 + 3{,}6x\right)dx = \left[-0{,}1x^3 + 1{,}8x^2\right]_0^{12} = [86{,}4] - [0] = 86{,}4FE$$

Nst. f_2 ausrechnen mit p-q-Formel: x_1=2 und x_2=10

$$A_2 = \int_2^{10} \left(-0{,}6x^2 + 7{,}2x - 12\right)dx = \left[-0{,}2x^3 + 3{,}6x^2 - 12x\right]_2^{10} = [40] - [-11{,}2] = 51{,}2FE$$

$$A_1 - A_2 = A$$
$$86{,}4 - 51{,}2 = 35{,}2FE$$