Lösungen zu AB 1

1) a) Nst. (30|0) $\quad 0 = 900a + 30b + c \quad | \quad 0 = 900a + 30b$

Nst. (0|0) $\quad 0 = c$

Hochp. (15|11,25) $\quad 11{,}25 = 225a + 15b + c \quad | \quad 11{,}25 = 225a + 15b$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$a = -0{,}05$ oder $-\frac{1}{20}$

$b = 1{,}5$ oder $\frac{3}{2}$

$f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}5x$

b) A_{max} von Fenster (Dreieck)

HB: $A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$

NB: $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}5x \qquad f(x) = y$

NB in HB einsetzen

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (-0{,}05x^2 + 1{,}5x)$

$A(x) = -0{,}025x^3 + 0{,}75x^2$ Zielfunktion

$\mathbb{D} = [0;30]$ Kleinstmögliche Seitenlänge für x ist Null
größt " " " " ist 30

$A'(x) = -0{,}075x^2 + 1{,}5x$

$A''(x) = -0{,}15x + 1{,}5$

$A'(x) = 0$

$0 = -0{,}075x^2 + 1{,}5x$

$0 = x(-0{,}075x + 1{,}5)$

$x_1 = 0 \qquad -0{,}075x + 1{,}5 = 0$

$-0{,}075x = -1{,}5$

$\underline{x_2 = 20\ m}$

x-Werte überprüfen in $A''(x)$

$A''(0) = +1{,}5 > 0 \Rightarrow$ Min.

$A''(20) = -1{,}5 < 0 \Rightarrow$ Max.

x_2 einsetzen in NB, um y zu berechnen

$y = -0{,}05 \cdot 20^2 + 1{,}5 \cdot 20$

$\underline{y = 10\ m}$

einsetzen in HB

$A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10$

$\underline{A = 100\ m^2}$

Randextrema überprüfen:
Ränder des $\mathbb{D}$ in Zielfunkt. einsetzen

$A(0) = 0$

$A(30) = 0$

① ②

2.) HB: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

NB: $f(x) = -2x^2 + 8$

Da das Dreieck bei einer Nullstelle beginnt, ist die Strecke von Nullstelle bis y-Achse bekannt. Die rechte Seite ist unbekannt (x) und wird dazu addiert

$f(x) = 0$

$0 = -2x^2 + 8$

$x_1 = -2 \Rightarrow$ Seite a des Dreiecks setzt sich zusammen aus $(2+x)$

$x_2 = +2$

Seite b ist y bzw. f(x)

HB: $A = \frac{1}{2} \cdot (2+x) \cdot y$

NB: $y = -2x^2 + 8$

einsetzen

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (2+x) \cdot (-2x^2 + 8)$ ausmultiplizieren

$A(x) = \frac{1}{2}(-4x^2 + 16 - 2x^3 + 8x)$

$= -2x^2 + 8 - x^3 + 4x$

$A(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 8$ Zielfunktion

$\mathbb{D} = [0; 2]$ Strecke x kann maximal 2 Einheiten betragen

$A'(x) = -3x^2 - 4x + 4$

$A''(x) = -6x - 4$

$A'(x) = 0$

$0 = -3x^2 - 4x + 4$

$0 = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$

$[x_1 = -2]$

$\underline{x_2 = +\frac{2}{3}}$

$A''(\frac{2}{3}) = -8 < 0 \Rightarrow$ Max.

x_2 einsetzen in NB

$y = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 8$

$\underline{y = 7\frac{1}{9}}$

einsetzen in HB

$A = \frac{1}{2} \cdot (2 + \frac{2}{3}) \cdot 7\frac{1}{9}$

$= 9\frac{13}{27}$

$\underline{\approx 9{,}5 \text{ FE}}$

Randstellen:

$A(0) = 8$

$A(2) = 0$

Bemerkung: Auch wenn die Strecke x Null ist, so bleibt für die Seite a die Länge 2 übrig und es ergibt sich ein Flächeninhalt, der aber <u>kleiner</u> ist als 9,5 FE.

3.) HB: $A = x \cdot (y-1)$

NB: $f(x) = -x^2 + 13$

$$A(x) = x \cdot (-x^2 + 13 - 1)$$
$$A(x) = -x^3 + 12x \quad \text{Zielfunktion}$$
$$A'(x) = -3x^2 + 12$$
$$A''(x) = -6x$$

$\mathbb{D} = [0; 3{,}5]$

$f(x) = g(x)$
$-x^2 + 13 = 1$
$-x^2 + 12 = 0$
$-x^2 = -12$
$\boxed{x_1 = -3{,}5}$
$x_2 = +3{,}5$

$A'(x) = 0$
$0 = -3x^2 + 12$
$3x^2 = 12$
$x^2 = 4$
$\boxed{x_1 = -2}$
$x_2 = +2$

$A''(2) = -12 < 0 \Rightarrow$ Max.

$f(2) = 9 \Rightarrow$ Die andere Seite des Rechtecks ist 8!

$A = 2 \cdot (9-1)$
$= 16$ FE

$\left.\begin{array}{l} A(0) = 0 \\ A(3{,}5) = -0{,}875 \end{array}\right\}$ kleiner als 16 FE

4.) HB: $A = \frac{1}{2}x \cdot (y-3)$

NB: $f(x) = -x^2 + 15$

$$A(x) = \frac{1}{2}x \cdot (-x^2 + 15 - 3)$$
$$A(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 6x \quad \text{Zielfunktion}$$
$$A'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6$$
$$A''(x) = -3x$$

$\mathbb{D} = [0; 3{,}5]$

$f(x) = g(x)$
$-x^2 + 15 = 3$
$x^2 = 12$
$\boxed{x_1 = -3{,}5}$
$x_2 = +3{,}5$

$A'(x) = 0$
$0 = -\frac{3}{2}x^2 + 6$
$\vdots$
$\boxed{x_1 = -2}$
$x_2 = +2$

$A''(2) = -6 < 0 \Rightarrow$ Max.

$f(2) = 11 \Rightarrow$ andere Seite ist 8!

$A = \frac{1}{2} 2 \cdot (11-3)$
$= 8$ FE

$\left.\begin{array}{l} A(0) = 0 \\ A(3{,}5) = -0{,}4375 \end{array}\right\}$ kleiner als 8 FE